T H E S E présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris 6 -

spécialité : Physique Théorique

par Jean-Marc LUCK

Sujet de la thèse :

LA TRANSITION DE RUGOSITE, ET SES APPLICATIONS A LA THEORIE DES CHAMPS DE JAUGE SUR LES RESEAUX.

soutenue le 9 Novembre 1981 devant la Commission composée de :

M.	J.C. LE GUILLOU	Président
M.	C. ITZYKSON	Rapporteur
M.	B. DERRIDA	Examinateur
M.	J.M. DROUFFE	"
M.	A. NEVEU	"

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547318_0024

T H E S E présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris 6 -

spécialité : Physique Théorique

par Jean-Marc LUCK

Sujet de la thèse :

LA TRANSITION DE RUGOSITE, ET SES APPLICATIONS A LA THEORIE DES CHAMPS DE JAUGE SUR LES RESEAUX.

soutenue le 9 Novembre 1981 devant la Commission composée de :

M.	J.C. LE GUILLOU	Président
M.	C. ITZYKSON	Rapporteur
M.	B. DERRIDA	Examinateur
M.	J.M. DROUFFE	"
M.	A. NEVEU	"

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur R.Balian de m'avoir accueilli au Service de Physique Théorique de l'Orme des Merisiers, où j'ai profité de discussions enrichissantes avec l'ensemble des membres du laboratoire, dans une ambiance de travail favorable.

Je suis particulièrement reconnaissant à C.Itzykson de m'avoir proposé le sujet de cette thèse, et régulièrement entouré de ses conseils au cours de l'avancement de mes recherches. La collaboration avec J.M. Drouffe et J.B.Zuber fut également agréable et fructueuse. L'une ou l'autre partie de ce travail m'a amené à profiter utilement de l'expérience de E.Brézin, F.David, B.Derrida, M.Gaudin, P.Moussa et J.Zinn-Justin, du Service de Physique Théorique, et J.L.Pichard et G.Sarma, du Service de Physique du Solide et de Résonance Magnétique. Je remercie également Madame N.Tichit et les membres du bureau de calcul pour avoir aidé mes premiers pas en informatique.

Je tiens enfin à remercier Madame D.Bunel, responsable de la réalisation matérielle de ce travail.

Je suis très reconnaissant à M.le Professeur J.C. Le Guillou d'avoir accepté d'être Président de mon jury de thèse, ainsi qu'aux examinateurs : B.Derrida, J.M.Drouffe, C.Itzykson, A.Neveu.

SOMMAIRE

INTRODUCTION 5

CHAPITRE I - GENERALITES SUR LES CHAMPS DE JAUGE SUR LES RESEAUX, ET SUR LA TRANSITION RUGUEUSE

1) Les champs de jauge : de la théorie continue à la théorie sur réseau 7
   1.a) Cas abélien 7
   1.b) Cas général non-abélien 8

2) Le modèle des champs de jauge sur les réseaux 10
   2.a) Rappels sur la théorie dans l'espace-temps continu 10
   2.b) Passage à la théorie sur réseau 11
   2.c) Diagramme de phases et contenu physique 14
   2.d) Apparition d'une transition supplémentaire 20

3) La transition rugueuse en physique de la matière condensée 21
   3.a) Croissance cristalline et rugosité 21
   3.b) Extension aux modèles de spins 22
   3.c) Preuves expérimentales 24

CHAPITRE II - MODELISATION DU CAS TRIDIMENSIONNEL, ET NATURE DE LA TRANSITION

1) Modélisation du problème 26
   1.a) Les modèles S.O.S. 26
   1.b) Choix des observables 28

2) Transformations de dualité 29
   2.a) Exemple du modèle d'Ising 30
   2.b) Transformation du modèle S.O.S. 35

3) Nature de la transition rugueuse 39
   3.a) La transition de Kosterlitz-Thouless 39
   3.b) Relations avec le gaz coulombien 40
   3.c) Deux calculs simples 42
   3.d) Résultats 48

4) Le modèle soluble de Van Beijeren 51
4.a) Du modèle S.O.S. aux six vertex 51
4.b) Résultats 52

5) Théorie effective dans la phase rugueuse 55
5.a) L'approximation gaussienne 55
5.b) Coefficient universel du potentiel entre quarks 57

CHAPITRE III - ANALYSE DE DEVELOPPEMENTS DE COUPLAGE FORT

1) Les développements en série en mécanique statistique 61
1.a) Cas des modèles de spins 61
1.b) Cas des modèles de jauge 63

2) L'opérateur de localisation 65
2.a) Généralisation du cas tridimensionnel 65
2.b) Extrapolation des séries de couplage fort 68

3) L'énergie libre de marche 76
3.a) Développements de couplage fort 76
3.b) Analyse des séries 77

4) Conclusions et comportement à grande dimension 80

CHAPITRE IV - ETUDE DE SYSTEMES DE TAILLE FINIE
(méthode des rubans)

1) La méthode des rubans 87
1.a) Formalisme hamiltonien et matrice de transfert 87
1.b) Expression des quantités thermodynamiques 87
1.c) Choix d'un modèle S.O.S. 89

2) Comportement des longueurs de corrélation 92
2.a) Cadre général : le "finite-size scaling" 92
2.b) Deux modèles solubles bidimensionnels 94
2.c) Application à notre modèle de surface S.O.S. 99
2.d) Renormalisation phénoménologique et valeur de t_R 100

3) Energie de marche et fonctions "d'échelle" 101
3.a) Extrapolation des énergies de marche 101
3.b) Détermination de l'indice critique ν 102

3.c) Fonctions "d'échelle" relatives à l'énergie de marche et aux longueurs de corrélation 103

4) Etude de la localisation de la surface 105

4.a) Profil des rubans 105

4.b) Comportement de la longueur de localisation 107

FIGURES 110

EPILOGUE 118

REFERENCES ET PUBLICATIONS 120

INTRODUCTION

L'objet de ce travail se situe aux confins de différentes régions de la Physique Théorique : Mécanique Statistique, Théorie des Champs, Physique des particules élémentaires. C'est dans ce dernier domaine que les développements des théories des champs de jauge connurent récemment un grand succès. La difficulté intrinsèque de ces théories, c'est-à-dire la nécessité d'une approche non-perturbative, motiva l'introduction de ces modèles sur réseau, et l'utilisation des méthodes d'approche usuelles de la Mécanique Statistique, qui ont permis la compréhension des phénomènes critiques, autre succès considérable des années soixante-dix. En particulier, les développements de haute température, ou de couplage fort, apportent une solution naïve au problème du confinement. Après avoir rappelé comment apparut, de façon inattendue, une transition de phase supplémentaire dans ces modèles, et décrit sommairement son analogue en physique de la matière condensée, nous allons présenter notre étude de cette transition rugueuse par trois approches différentes, toutes inspirées par la Mécanique Statistique.

Le concept général de dualité nous permettra de reconnaître cette transition dans le cas tridimensionnel, puis de prévoir le comportement critique de certaines observables caractérisant la localisation d'un interface.

L'étude des séries de couplage fort de différentes quantités nous fera explorer d'autres dimensionnalités, et en particulier quatre, correspondant à notre espace-temps physique.

La "méthode des rubans" complètera enfin notre image de la transition de rugosité, à la lumière de la renormalisation phénoménologique.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES CHAMPS DE JAUGE SUR LES RESEAUX, ET SUR LA TRANSITION RUGUEUSE

I) LES CHAMPS DE JAUGE : DE LA THEORIE CONTINUE A LA THEORIE SUR RESEAU

Les théories des champs possédant une symétrie locale dite "de jauge" sont incontestablement les meilleurs candidats pour expliquer les interactions fondamentales de la nature.

I.a) Cas abélien

L'exemple le plus ancien est celui de l'électromagnétisme. Au niveau classique, les quantités physiquement observables (champs électrique et magnétique), dérivent de potentiels scalaire et vecteur selon les formules :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \right. \qquad \text{(I.1)}$$

Ils sont invariants par une large classe de transformations des potentiels :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \\ V \longrightarrow V - \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{array} \right. \qquad \text{(I.2)}$$

où $\chi(\vec{r}, t)$ est une fonction arbitraire (continûment différentiable) de la position et du temps.

A cette non-unicité des potentiels $\vec{A}$ et V correspond, dans un langage plus moderne, l'invariance du lagrangien de l'électrodynamique :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{\psi} (i \not{D} - m) \psi$$

avec $$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad \text{(I.3)}$$

et $$\not{D} = \gamma_\mu D^\mu = \gamma_\mu (\partial^\mu + i e A^\mu)$$

par la transformation locale simultanée des champs A_μ et ψ :

$$\left| \begin{array}{l} \psi(x) \longrightarrow \psi(x) \exp i e \chi(x) \\ A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x) \end{array} \right. \qquad \text{(I.4)}$$

Cette transformation, identique à (I.2) pour ce qui est du "champ de jauge" A_μ, est connue sous le nom de transformation de jauge (de seconde espèce).

Dans la théorie quantique (QED) correspondant au lagrangien (I.3), l'invariance de jauge doit être brisée afin de supprimer les "modes zéros" correspondant précisément aux transformations (I.4). La brisure peut se faire en donnant une masse m_γ au photon :

$$\delta\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} m_\gamma^2 A_\mu A^\mu \tag{I.5}$$

ou plus couramment en ajoutant un terme de la forme :

$$\delta\mathcal{L}_2 = \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{I.6}$$

On dit abusivement que ce terme fixe la jauge. Il ne "fixe" en réalité que le propagateur du photon :

$$D_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\lambda}) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2 + i\varepsilon} \tag{I.7}$$

Les quantités physiquement observables, et en particulier les éléments de la matrice S, sont, comme il se doit, indépendants du choix de la condition de jauge, c'est-à-dire de λ .

La transformation (I.4) du champ de matière ψ se traduit par l'action de l'élément :

$$\exp ie\chi(x) \quad \in U(1)$$

C'est pourquoi le groupe abélien U(1) est dit groupe de jauge de l'électromagnétisme.

I.b) Cas général non-abélien

L'invariance de jauge fut étendue aux groupes non-abéliens par Yang et Mills[1]. Le cas qui les intéressait était celui de SU(2) ; leur idée était

de considérer l'invariance de rotation dans l'espace d'isospin des nucléons comme une symétrie locale exacte des interactions fortes.

L'extension des théories de jauge non-abéliennes à d'autres groupes a connu beaucoup de succès en physique des particules depuis environ dix ans :

* Le modèle de Glashow-Salam-Weinberg, qui unifie les interactions faibles et électromagnétiques, est construit sur le groupe de jauge $SU(2) \otimes U(1)$.

* La chromodynamique quantique (QCD), bâtie sur un groupe SU(3) dit de couleur, a permis de nombreuses prédictions théoriques concernant les interactions fortes à courte distance, qui ont pu être vérifiées expérimentalement.

* Les théories grand-unifiées enfin, où toutes les interactions connues (sauf peut-être la gravitation) sont gouvernées par une seule constante de couplage à énergie suffisamment élevée, sont construites sur un groupe de jauge unificateur tel que SU(5) ou SO(10).

La théorie des champs de jauge non-abéliens, et en particulier QCD, présente dans l'espace-temps continu une difficulté jusqu'à présent insurmontable : la propriété essentielle attendue d'une telle théorie des interactions fortes est de confiner les objets élémentaires de la théorie, que sont les champs de matière (quarks) et les champ de jauge (gluons). Or cette propriété ne peut être décrite en termes de théorie des champs perturbative conventionnelle : le confinement est par essence un phénomène non-perturbatif, et nécessite donc l'emploi de techniques différentes.

C'est précisément ce problème qui amena K.Wilson le premier à introduire les théories de jauge sur les réseaux[2]. Comme nous le verrons, le réseau introduit une régularisation ultraviolette naturelle : l'espace des moments est réduit à la première zone de Brillouin. Cette modification fondamentale permet de balayer toutes les valeurs de la constante de couplage nue g_0^2, qui joue un rôle analogue à la température $\beta^{-1} = k_B T$ en mécanique statistique. Cette analogie est très profonde : ce sont les mêmes méthodes (champ moyen, dualité, développement de couplage fort, étude de systèmes de taille finie, groupe de renormalisation) qui sont utilisées pour les systèmes à symétrie globale (modèles de spins de la mécanique statistique : Heisenberg, Ising...), et pour les systèmes à symétrie locale (théorie des champs de jauge sur les réseaux).

2) LE MODELE DES CHAMPS DE JAUGE SUR LES RESEAUX

2.a) Rappels sur la théorie dans l'espace-temps continu

Pour rappeler ces quelques formules qui nous seront utiles pour passer à la théorie régularisée sur un réseau, nous adoptons les notations du livre de C. Itzykson et J.B. Zuber[3].

Le lagrangien de ces théories, dit de Yang-Mills, est une généralisation de (I.3) :

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{2g_0^2} \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\psi} \not{D} \psi \qquad \text{(I.8)}$$

ψ est un multiplet de N champs ψ_i appartenant à une représentation donnée d'un groupe de Lie G. $F_{\mu\nu}$ est le tenseur de courbure défini par :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] \qquad \text{(I.9)}$$
$$= - [D_\mu, D_\nu]$$

A_μ est un élément de l'algèbre de Lie de G :

$$A_\mu = A_\mu^a t_a \qquad \text{(I.10)}$$

où t_a sont les générateurs de l'algèbre.

Enfin la matrice $\not{D}$ est : $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu - A_\mu(x))$ (I.11)

Le lagrangien (I.8) est invariant par transformation de jauge, c'est-à-dire par toute transformation locale simultanée des ψ_i et des A_μ^a :

* transformation finie :

$$\begin{cases} \psi(x) \longrightarrow U(g(x)) \cdot \psi(x) \\ A_\mu(x) \longrightarrow \partial_\mu g(x) \cdot g^{-1}(x) + g(x) A_\mu(x) g^{-1}(x) \end{cases} \qquad \text{(I.12)}$$

* transformation infinitésimale :

$$\left|\begin{array}{l} \delta \psi_i(x) = \delta\alpha_a(x)\ T^a_{ij}\ \psi_j(x) \\ \delta A^a_\mu(x) = \partial_\mu \delta\alpha^a(x) + C^{bca}\ \delta\alpha_b(x)\ A_{\mu c}(x) \end{array}\right. \qquad \text{(I.13)}$$

On a explicité les indices internes du groupe G :

a : indice dans la représentation adjointe,
i : indice dans la représentation choisie R .

Le caractère local de la symétrie interdit l'existence de paramètres d'ordre locaux, analogues à l'aimantation des modèles de spins, qui ne seraient pas invariants de jauge. Nous admettrons qu'une base des observables invariantes de jauge est constituée par l'ensemble des boucles de Wilson. Une boucle de Wilson est l'exponentielle ordonnée de la circulation des champs de jauge le long d'une courbe fermée :

$$W(C) = \mathrm{Tr}\ P \exp \oint_{(C)} A_\mu(x)\ dx^\mu \qquad \text{(I.14)}$$

Remarque : On pourrait prendre une fonction invariante quelconque (fonction symétrique des valeurs propres) de l'opérateur figurant sous la trace dans (I.14). Dans la théorie sur réseau, cela reviendrait à faire intervenir plusieurs représentations $R_1 \ldots R_m$ dans l'action de Wilson (I.16).

2.b) Passage à la théorie sur réseau

On remplace l'espace-temps minkowskien de la relativité restreinte, après rotation de Wick et discrétisation identique dans toutes les directions, par un réseau euclidien, choisi hypercubique pour des raisons de simplicité, de maille a et de dimension (entière) d [2,4].

Les variables dynamiques sont maintenant définies de la façon suivante :

* sur chaque noeud $\vec{r}$ du réseau, on définit un multiplet de N champs $\sigma_i(\vec{r})$ (que nous choisissons scalaires pour simplifier), appartenant à la représentation R ;

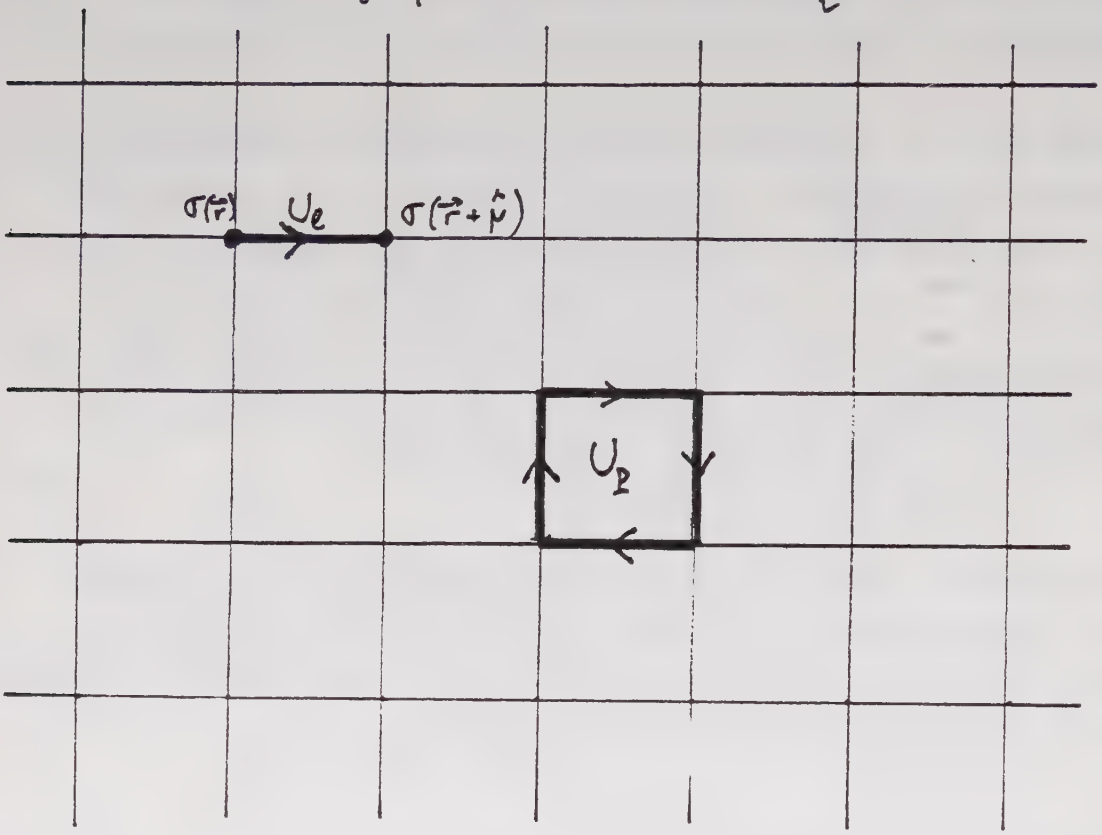
* sur chaque lien ℓ du réseau, on définit une matrice $U(\ell)$ représentant un élément $g(\ell)$ du groupe de jauge dans la représentation unitaire R. Ceci nécessite une orientation des liens.

La version discrétisée de l'action dans l'espace continu :

$$S_{YM} = \int d^4x \; \mathcal{L}_{YM}(x) \qquad \text{(I.15)}$$

est généralement celle de Wilson :

$$S_W = \beta_g \sum_P \chi_R(U_P) + \beta_m \sum_\ell \sigma^+ \cup \sigma \qquad \text{(I.16)}$$



* U_P est le produit ordonné le long d'un carré élémentaire ou plaquette des quatre matrices U_ℓ bordant ce carré. χ_R est le caractère associé à la représentation choisie (c'est-à-dire la partie réelle de la trace). La première somme porte sur toutes les plaquettes du réseau.

* $\sigma^+ \cup \sigma$ représente $\sigma_i^*(\vec{r})\, U_{ij}(\ell)\, \sigma_j(\vec{r}+\hat{\mu})$, où $\vec{r}$ et $\vec{r}+\hat{\mu}$ sont les extrémités du lien ℓ. La seconde somme porte sur tous les liens du réseau.

* Enfin les deux paramètres β_g et β_m , définis par analogie avec le paramètre $\beta = \frac{1}{k_B T}$ de la mécanique statistique, sont reliés aux paramètres originaux de la théorie continue par :

$$\left| \begin{array}{l} \beta_g = \dfrac{a^{d-4}}{2 g_o^2} \\ \beta_m = \dfrac{1}{2} a^{d-1} \end{array} \right. \qquad \text{(I.17)}$$

La version discrétisée de la transformation de jauge (I.12), qui laisse bien sûr l'action de Wilson (I.16) invariante, s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_i(\vec{r}) \longrightarrow V_{ij}(\vec{r})\, \sigma_j(\vec{r}) \\ U(\ell) \longrightarrow V(\vec{r})\, U(\ell)\, V^{+}(\vec{r}+\hat{\mu}) \end{array} \right. \qquad \text{(I.18)}$$

où $V(\vec{r})$ est une matrice unitaire, définie arbitrairement en chaque site, de taille $N \times N$.

Le modèle est maintenant sous la forme usuelle d'un modèle de mécanique statistique. Toutes les valeurs moyennes dans le vide des quantités observables (donc invariantes de jauge) sont identiques aux valeurs moyennes statistiques calculées avec le poids $\exp - S_W$:

$$\langle o | \mathcal{O} | o \rangle \equiv \frac{\sum_{\{\sigma, U\}} \mathcal{O} \exp - S_W}{\sum_{\{\sigma, U\}} \exp - S_W} = \langle \mathcal{O} \rangle \qquad \text{(I.19)}$$

Remarque : Les sommes statistiques figurant dans (I.19) peuvent être calculées selon deux prescriptions :

* sommer sur toutes les configurations de $\{\sigma, U\}$ deux à deux non-équivalentes (c'est-à-dire non reliées par une transformation de jauge (I.18)).

* ou bien sommer sur toutes les configurations de $\{\sigma, U\}$. Dans ce cas, le volume (fini ou infini) du groupe de jauge s'élimine entre numérateur et dénominateur de (I.19).

Une base, ou plutôt un système surcomplet (ou surdéterminé) d'observables invariantes est encore constitué par les boucles de Wilson sur réseau :

$$\langle W(C) \rangle = \langle \chi_R \left(\prod_{l \in C} U_l \right) \rangle \qquad \text{(I.20)}$$

où le produit porte sur les liens l orientés d'un circuit C fermé sur le réseau.

Signalons enfin que les groupes que nous prendrons comme exemples, et qui ont été le plus étudiés, sont souvent $\mathbb{Z}_n$ (groupe des racines n-ièmes de l'unité), et en particulier $\mathbb{Z}_2$, qui sont loin des groupes de Lie en apparence, mais plus simples à manipuler ; de plus, un grand nombre de propriétés physiques semblent dépendre assez peu du groupe choisi.

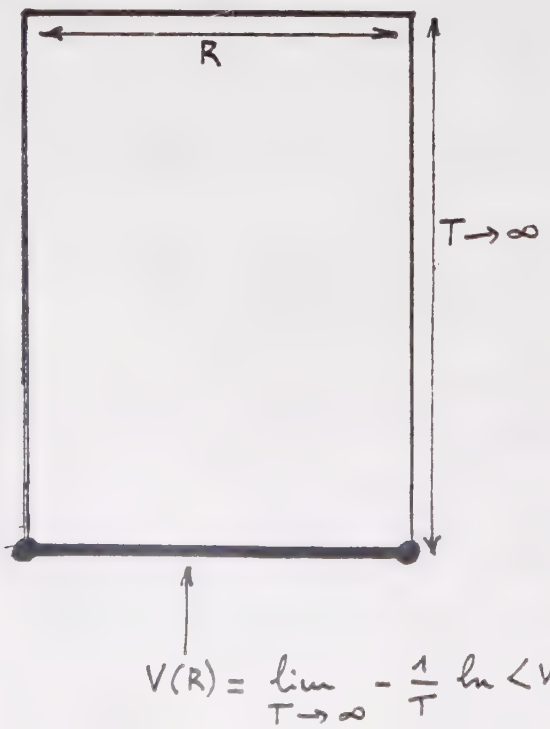
2.c) Diagramme de phases et contenu physique

Suivant la méthode habituellement employée en mécanique statistique, on essaie de déterminer la nature des phases du modèle (paramètres d'ordre), et celle des lignes singulières ou des points singuliers, dans le plan des paramètres (β_g, β_m). Examinons d'abord la ligne $\beta_m = 0$ (pure théorie de jauge).

Une propriété essentielle attendue dans ce cas est reliée au comportement asymptotique d'une grande boucle de Wilson de taille $R \times T$. Pour T grand, on a :

$$\langle W \rangle \sim \exp\left(- T . V(R)\right) \qquad \text{(I.21)}$$

où $V(R)$ est le potentiel d'interaction de deux charges classiques séparées par une distance R :



Deux cas sont alors possibles :

* La boucle de Wilson décroît selon une "loi d'aire", et alors le potentiel $V(R)$ croît linéairement avec l'éloignement ; il y a confinement :

$$\langle W \rangle \sim \exp(-kRT) \longleftrightarrow V(R) = kR \qquad \text{(I.22)}$$

$k(\beta)$ est appelé tension de corde.

* La boucle de Wilson suit une "loi de périmètre", et alors le potentiel est borné aux grandes distances : on est dans une phase non-confinante.

La situation générique est la suivante : il existe une dimension critique inférieure d_c , qui vaut 4 dans le cas des groupes continus comme SU(N), N=2 ou 3, ou O(N), et 3 dans le cas des groupes discrets comme $\mathbb{Z}_n$, telle que :
* pour $d < d_c$, il n'y a pas de transition de phase, et toute valeur de g_0^2 est confinante. En particulier, à $d = 2$ (dimension minimale où le modèle a un sens), toute théorie avec l'action (I.16) est triviale ; la loi d'aire est exacte, comme l'ont remarqué R. Balian, J.M. Drouffe et C. Itzykson[5].
* pour $d > d_c$, il existe une valeur critique g_{0c}^2 du couplage g_0^2 qui sépare une phase de couplage fort, confinante et non-perturbative, d'une phase de couplage faible, non-confinante, et perturbative au sens habituel du terme.

Ce schéma général ressemble beaucoup à celui des modèles de spins (à symétrie globale), pour lesquels la dimension critique inférieure est $d_c = 1$ pour les groupes de symétrie discrets de type Ising (un argument simple est donné dans Landau[6], § 152), alors qu'elle est $d_c = 2$ pour les groupes continus (théorème de Mermin-Wagner[7]).

Deux méthodes générales simples permettent d'établir ces résultats :

* *les développements de couplage fort* (développements autour de $\beta = 0$) : nous les utiliserons pour d'autres quantités au Chapitre III.

* *l'approximation du champ moyen*
Son grand avantage est de conduire à des calculs faciles, comme pour les modèles de spins. Elle souffre cependant d'un défaut qui n'est pas encore tout-à-fait compris à ce jour : en attribuant à des quantités non-observables et non-invariantes de jauge (exemple : le "lien" $\langle U \rangle$) une valeur moyenne non-nulle, on semble contredire le célèbre théorème d'Elitzur[8]. Cette méthode conduit

cependant à des résultats exacts en grande dimension (à l'ordre dominant d'un développement systématique en $\frac{1}{d}$, comme l'a montré J.M. Drouffe en partant d'un principe variationnel)[9]. Nous allons illustrer à la fois la simplicité de la méthode et l'analogie parfaite entre modèles de spins et de jauge en présentant les calculs pour le groupe $\mathbb{Z}_2$ dans les deux cas :

$\mathbb{Z}_2$ global	$\mathbb{Z}_2$ local
(modèle d'Ising en champ nul)	(pure théorie de jauge)

(1) on attribue une valeur moyenne aux variables :

de spin : $\langle \sigma \rangle = m$	de lien : $\langle U \rangle = m$	(I.23)

(2) on remplace les voisins d'un site donné i par leur valeur moyenne, ce qui découple l'action S en somme d'actions S_i de particules indépendantes :

$S_i = 2d\beta m \sigma_i$	$S_i = 2(d-1)\beta m^3 U_i$	(I.24)

(3) on calcule (trivialement) la valeur moyenne correspondante, et on demande que (I.23) soit satisfaite, ce qui donne l'équation autocohérente :

$m = th(2d\beta m)$	$m = th\left(2(d-1)\beta m^3\right)$	(I.25)

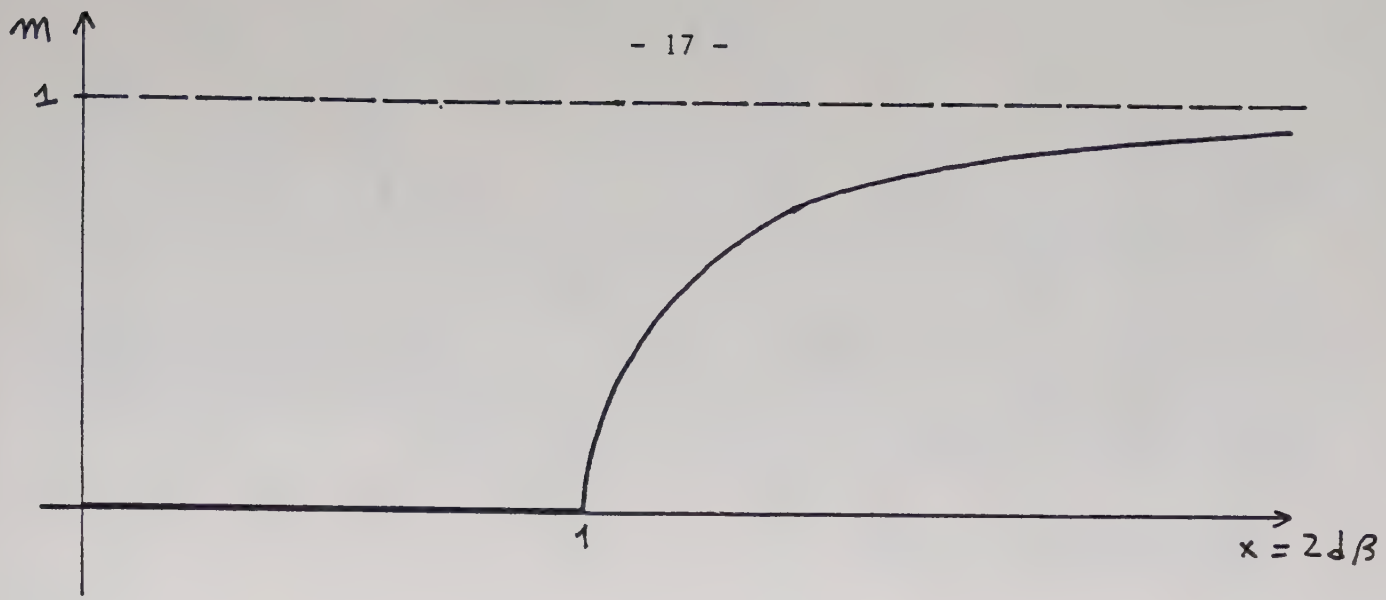
(4) interprétation : transitions de phase

Il existe une aimantation spontanée $m \neq 0$ dans la phase de basse température : $\beta > \frac{1}{2d} = \beta_c$

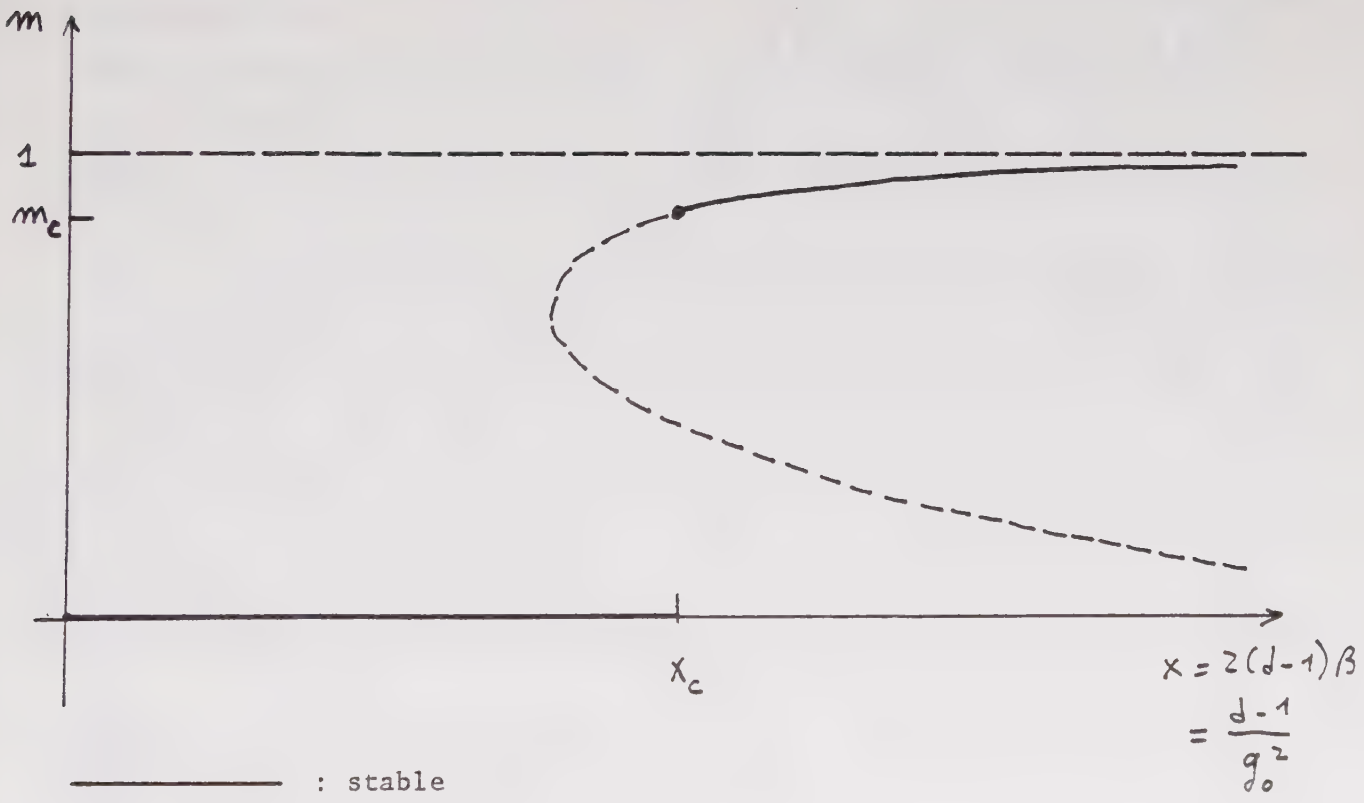
La solution stable est $m = 0$ pour $\beta < \beta_c$
$m \neq 0$ pour $\beta > \beta_c$
avec $2(d-1)\beta_c \approx 2,6783$

→ Dans le premier cas, $\langle W \rangle = 0$ à cette approximation. On s'attend à avoir une phase confinante.

→ Dans le second cas, $\langle W \rangle$ suit une loi de périmètre exacte : il n'y a pas confinement.



Cas de la symétrie globale(modèle d'Ising) :
la transition est continue, ou du second ordre.



——————— : stable

– – – – – – – : instable

Cas de la symétrie locale(théorie de jauge) :
la transition est discontinue, ou du premier ordre.

Remarques

En ce qui concerne le cas du champ de jauge :

a) Comme nous l'avons déjà signalé, il faut se garder d'interpréter m comme un quelconque paramètre d'ordre, ce qui violerait le théorème d'Elitzur. On peut par contre annoncer comme résultat du champ moyen :

$$\left| \begin{array}{l} \langle \text{plaquette} \rangle = m^4 \\ \\ \langle W \rangle = m^{(\text{périmètre})} \end{array} \right. \qquad \text{(I.26)}$$

avec $m \equiv 0$ dans la phase de couplage fort ($\beta < \beta_c$).

b) En réalité, une condition supplémentaire de stabilité doit être imposée sur les différentes branches de la fonction $m(x)$, comme il est discuté en détail dans l'article[5] déjà cité. Dans notre cas, le point (x_c , m_c) est donné par la formule :

$$\left| \begin{array}{l} \ln \operatorname{ch} K = \frac{3}{4} K \operatorname{th} K \\ \\ K = \operatorname{arth} m = x m^3 \end{array} \right. \qquad \text{(I.27)}$$

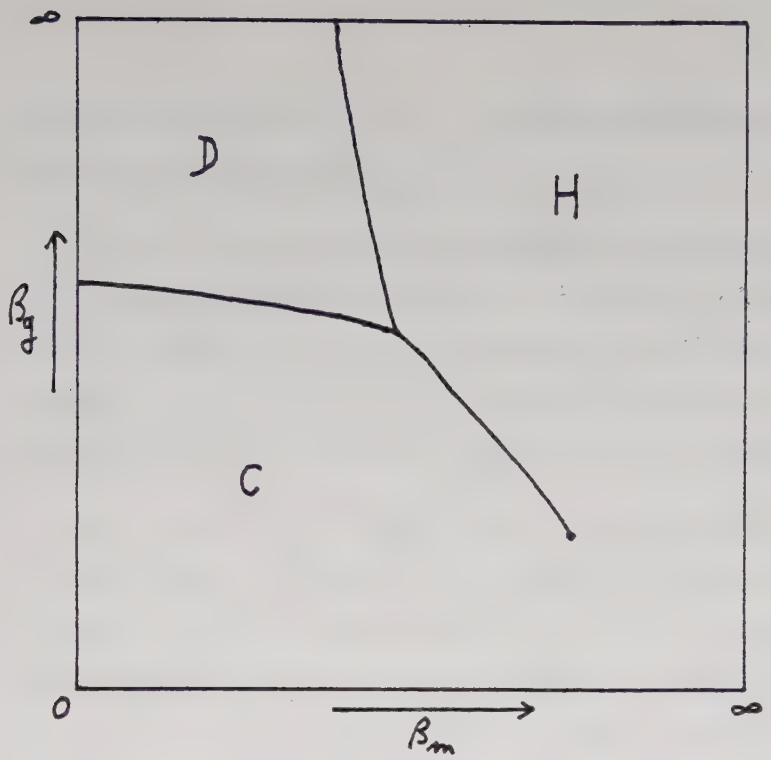
qui est l'analogue de (4.28) de [5].

Le résultat essentiel du champ moyen est donc l'existence d'une transition de déconfinement du 1er ordre. Cette prédiction semble exacte pour $d \gg 5$ [10,11] .

Le cas physiquement intéressant est $d = d_c = 4$. Les théories non-abéliennes sont à la fois asymptotiquement libres et confinantes jusqu'à $g_{oc}^2 = 0$: c'est ce que l'on attend d'une théorie des interactions fortes (ces propriétés sont également vérifiées dans la théorie continue pour les groupes SU(2) et SU(3)).

Nous n'entrerons pas dans le détail des résultats connus pour les groupes discrets, ni sur la foule des résultats obtenus en tenant compte de plusieurs caractères du groupe de jauge : ce domaine est encore en cours d'exploration.

Revenons enfin au modèle général (couplage non-nul entre champs de jauge et champs de matière). Nous donnons ici l'allure générale du diagramme de phase ($d > 4$ pour un groupe quelconque, et $d = 3$ pour un groupe discret) :

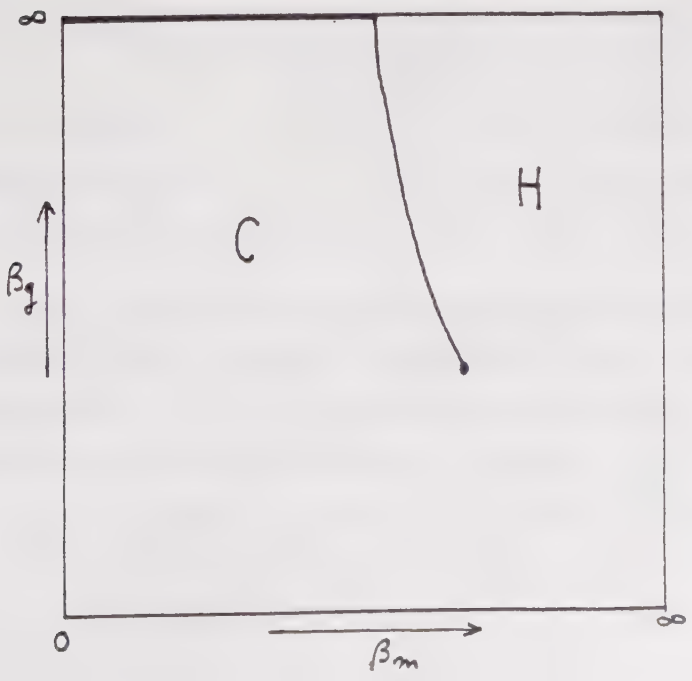


C : phase confinante

D : phase non-confinante

H : phase de Higgs

On connaît surtout ce diagramme par de récents calculs de Monte-Carlo pour différents groupes et en dimension 3 et 4. La nature des singularités (ordre des transitions) est encore mal connue : si la ligne entre D et C prolonge, ce qui est raisonnable de supposer, la transition du champ de jauge pur, on ignore la nature de la ligne D-H. On ne sait pas non plus déterminer la limite continue du modèle, donnée par les points du second ordre (longueur de corrélation infinie) où aboutissent les flots des constantes de couplage, selon le groupe de renormalisation. Remarquons que dans le cas particulier, mais physique, de la dimension 4, la phase déconfinée disparaît, et le diagramme prend l'allure suivante :

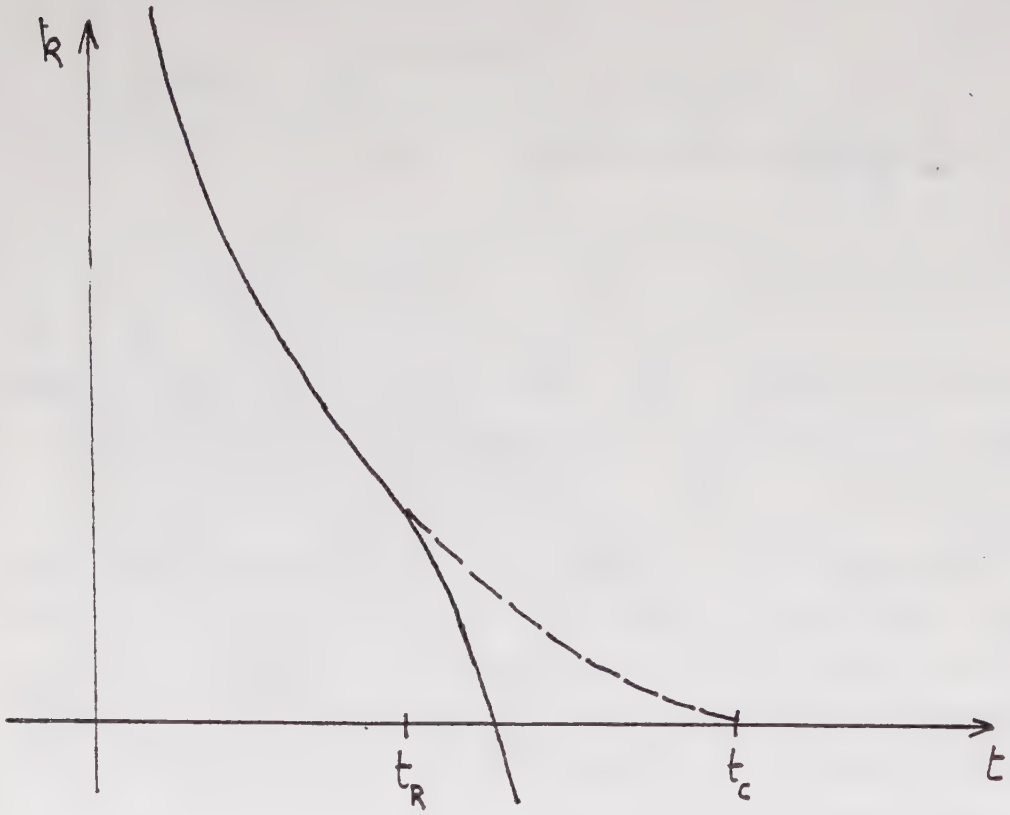


C : phase confinante

H : phase de Higgs

2.d) Apparition d'une transition supplémentaire

Une singularité inattendue de certaines observables du modèle fut découverte par J.M. Drouffe (Stony-Brook, été 1977). En étudiant les séries de couplage fort de la tension de corde $k(\beta)$, observable définie dans (I.22), il remarqua que k semblait s'annuler pour une valeur de $t = th\,\beta$ différente de la valeur critique t_c correspondant au déconfinement, et que la plus proche singularité de cette fonction était atteinte pour une valeur t_R bien distincte de t_c :



———— : extrapolation de la série de couplage fort

– – – – – : comportement attendu à $t \lesssim t_c$

Ce phénomène fut baptisé transition rugueuse (roughening transition) par G. Parisi en 1979[12], par analogie avec un phénomène connu en physique des solides. De même que la surface de séparation entre un cristal et sa vapeur, qui est lisse à température nulle, peut devenir irrégulière et rugueuse à une certaine valeur T_R de la température (voir paragraphe suivant I.3), les observables des théories de jauge sur les réseaux qui sont attachées à des

surfaces fluctuantes, comme la boucle de Wilson, peuvent être singulières pour une certaine valeur t_R du couplage.

L'étude de la transition rugueuse des théories de jauge, dont l'existence fut établie définitivement par C. Itzykson, M.E. Peskin et J.B. Zuber[13], et indépendemment par A.E. et P. Hasenfratz[14], fut généralisée à différents groupes, pour $d = 3$ et 4 , essentiellement par l'analyse de développements de couplage fort, auxquels sera consacré le chapitre III.

Bien qu'elle n'ait guère reçu d'interprétation satisfaisante en physique des particules, la transition rugueuse introduit néanmoins un obstacle infranchissable qu'est la non-analyticité entre le régime de couplage fort et le déconfinement, et ceci au moins pour les observables liées à des effets à longue portée et à des surfaces bidimensionnelles ; quant aux quantités plus locales, comme l'énergie libre du système, il est raisonnable de supposer, bien que ceci n'ait jamais reçu de preuve, qu'elles sont exemptes de singularités de rugosité.

3) LA TRANSITION RUGUEUSE EN PHYSIQUE DE LA MATIERE CONDENSEE

3.a) Croissance cristalline et rugosité

C'est à propos de la croissance d'un cristal en équilibre avec sa vapeur que Burton et ses collaborateurs introduisirent la transition rugueuse[15,16]. La vitesse de croissance cristalline est déterminée par la structure de la surface :

* si la surface est lisse, la croissance exige la formation de petits amas isolés, et donc le franchissement d'une barrière de nucléation.

* au contraire, si la surface possède de nombreux reliefs, et en particulier des marches portant des plis, la croissance peut se faire par simple déformation de ces marches, sans que ceci coûte une énergie de nucléation.

Burton et ses collaborateurs développèrent une analogie avec le modèle d'Ising bidimensionnel, dont la récente résolution exacte par Onsager[17] avait un retentissement sur toute la physique de la matière condensée. La température critique du modèle d'Ising devient une température T_R de transition rugueuse :

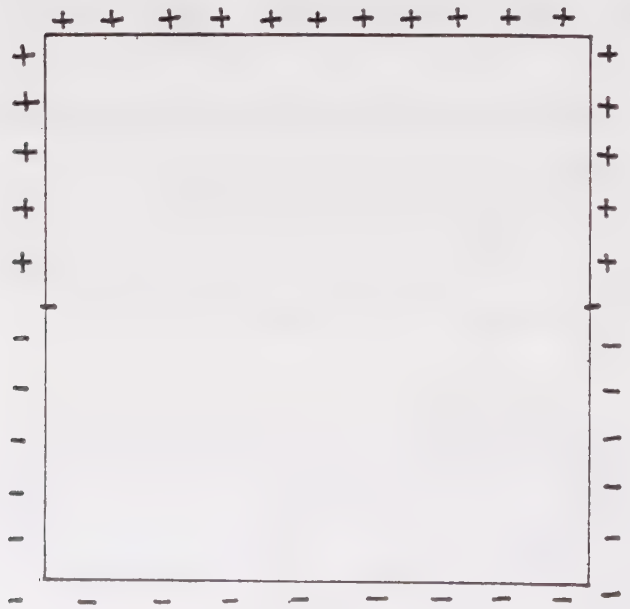
* à basse température ($T < T_R$), la concentration en marches est négligeable, et la croissance est lente, contrôlée par la nucléation à partir d'une surface lisse et bien définie.

* à haute température ($T > T_R$), la concentration élevée en marches et autres défauts assure une croissance rapide et anarchique, si bien que la surface se délocalise en développant des fluctuations à longue portée.

L'étude de l'équilibre d'un cristal tridimensionnel est en réalité bien plus compliquée : la discussion précédente s'appliquant séparément à chaque plan réticulaire, on aura autant de transitions rugueuses que de triplets d'indices de Miller ! La forme d'équilibre d'un cristal est déterminée par son diagramme de Wulf (voir [6], § 143) qui donne une représentation polaire de la tension de surface : la stabilité d'une face lisse correspond à un point de rebroussement sur ce diagramme, et la transition de rugosité de cette face correspond à la disparition de la singularité du diagramme de Wulf. Les diagrammes de Wulf ne sont malheureusement bien connus qu'à température nulle, où différents calculs ont été faits (voir l'article de revue de M. Drechsler[18]).

3.b) Extension aux modèles de spins

On sait que le modèle d'Ising tridimensionnel présente, à basse température, deux phases pures possibles, d'aimantations opposées. Le choix par le système de l'un de ces deux fondamentaux dégénérés est dicté par des conditions extérieures non-thermodynamiques : champ magnétique infinitésimal, conditions aux limites. On peut également étudier le cas où les conditions aux limites imposées favorisent la coexistence des deux phases :



A température nulle, les deux phases pures sont séparées par un interface plan. A température non-nulle, la situation dépend fortement de la dimension :

* $d=2$: l'interface est toujours délocalisé, ce qui mélange les deux phases à toute température non-nulle[19] :

$$T_R(d=2) = 0 \qquad \text{(I.28)}$$

* $d=3$: il existe une température de transition rugueuse, analogue à celle de la croissance cristalline, au-dessus de laquelle la notion de surface de séparation perd son sens :

$$0 < T_R(d=3) \approx T_c(d=2) < T_c(d=3) \qquad \text{(I.29)}$$

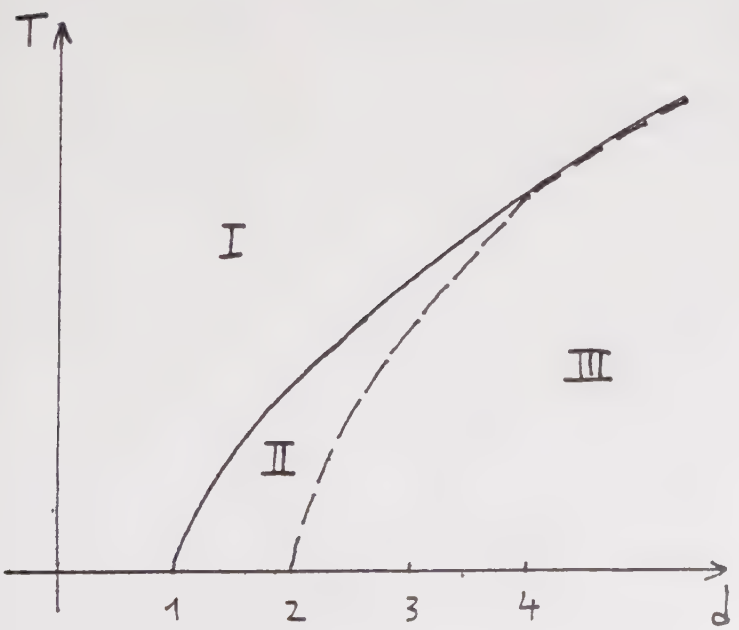
Cette transition est étudiée par Weeks et ses collaborateurs[20].

* $d \geqslant 4$: les deux phases pures sont bien séparées tant qu'elles coexistent. En d'autres termes :

$$T_R(d \geqslant 4) = T_c(d \geqslant 4) \qquad \text{(I.30)}$$

J. Lebowitz et ses collaborateurs ont obtenu des résultats rigoureux concernant cette transition rugueuse[21], à 2 et 3 dimensions.

Le diagramme de phases du modèle d'Ising en champ nul présente alors deux lignes singulières : $T_R(d)$ et $T_c(d)$:



——— : $T_c(d)$

— — — — : $T_R(d)$

I : une seule phase

II : deux phases séparées par un interface rugueux

III : deux phases séparées par un interface lisse

3.c) Preuves expérimentales

La transition rugueuse est restée environ trente ans sans confirmation expérimentale : pour les solides usuels, il est très difficile de balayer une zone de températures englobant T_R. Il existe actuellement deux résultats expérimentaux récents :

* aux Bell Laboratories : croissance de cristaux plastiques[22].

* à l'Ecole Normale Supérieure : hélium-4 à l'équilibre solide-superfluide[23,24]. Ce dernier groupe a mesuré la tension superficielle de l'hélium par des phénomènes de capillarité. Celle-ci paraît discontinue pour une valeur de la température située autour de 1 K. Ils expliquent cette singularité par la possibilité d'une transition rugueuse ; la quantité qu'ils ont mesuréeserait une combinaison de la tension superficielle et de l'énergie de marche (nous reparlerons de cette quantité aux chapitres III et IV).

Notons enfin qu'un article de l'un des physiciens de ce groupe, S. Balibar, paru dans La Recherche[25], illustre le mécanisme de la transition rugueuse par des photos de cristaux d'hélium, et par des images de simulations numériques, dues à Leamy et Gilmer.

*

* *

CHAPITRE II

MODELISATION DU CAS TRIDIMENSIONNEL, ET NATURE DE LA TRANSITION

1) MODELISATION DU PROBLEME

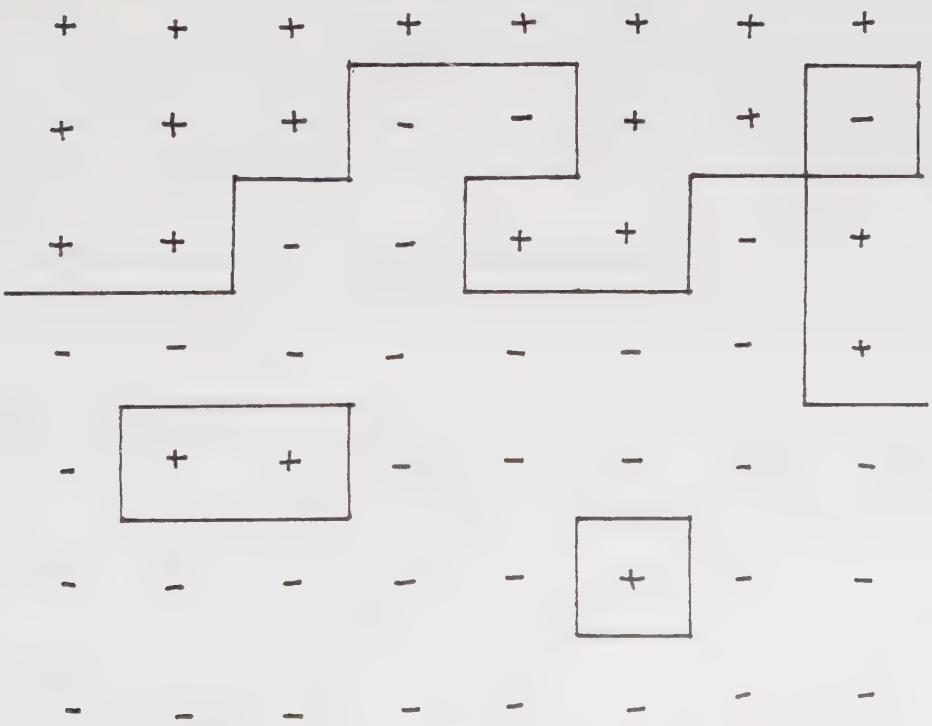
La transition rugueuse est, comme nous l'avons vu au paragraphe I.3, une transition de délocalisation d'une surface bidimensionnelle tracée sur un réseau :

* en théorie des champs de jauge : les surfaces s'appuyant sur une boucle de Wilson.
* dans les modèles de spins : un interface imposé par des conditions aux limites.
* pour la croissance cristalline : la frontière entre le cristal et le liquide, la vapeur ou la solution.

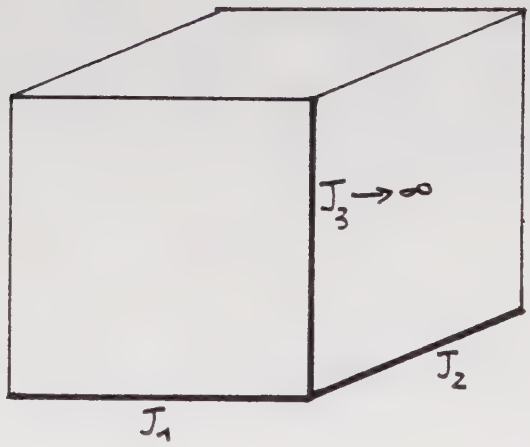
Dans les deux derniers cas, le réseau est tridimensionnel. Dans le premier cas, la transition rugueuse existe encore à $d \geqslant 4$, bien qu'une 2-surface ne délimite plus deux demi-espaces (voir chapitre III). Dans ce chapitre, nous allons modéliser le cas du réseau à 3 dimensions.

1.a) Les modèles S.O.S.

L'interface d'un modèle d'Ising a en général l'allure suivante :



Il peut présenter des îlots disconnectés de spins retournés, ainsi que des surplombs. Si l'on néglige cependant ce type de configurations, l'interface peut être décrit en donnant l'altitude à laquelle il passe au-dessus de chaque point d'un plan de référence. Les variables du problème sont alors les entiers $h(\vec{r})$, où $\vec{r}$ décrit un réseau plan bidimensionnel. Cette approximation, comme sous le nom de S.O.S. (solid-on-solid), est supposée ne pas modifier de façon importante le phénomène de rugosité, car nous verrons que celui-ci est dû à des effets à longue portée. Une façon rigoureuse d'obtenir le modèle S.O.S. est de prendre la limite $J_3 \to \infty$ d'un modèle d'Ising anisotrope :



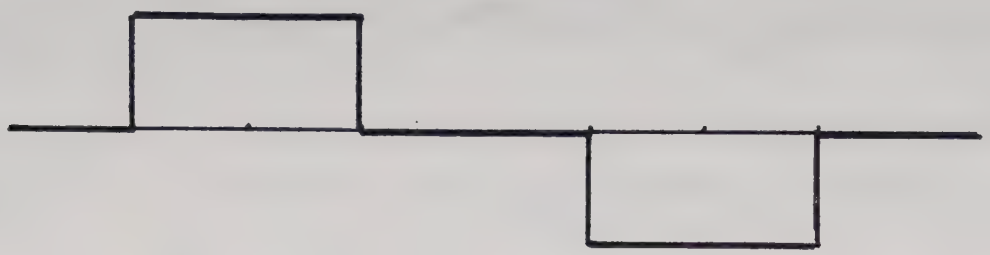
Les configurations à îlots ou à surplombs sont alors "défavorisées" par des puissances d'un facteur $\exp(-2\beta J_3)$ tendant vers zéro, par rapport aux configurations S.O.S.

Pour déterminer l'énergie d'une configuration de notre solide, supposons que chaque paire d'atomes voisins possède une énergie de liaison J. L'énergie est alors :

$$E = J(n_c - n_F) \qquad \text{(II.1)}$$

où n_c et n_F sont respectivement les nombres de liaisons qu'il faut casser

et former pour passer de l'interface plan (E=0) à l'interface considéré.
Par exemple :



$n_c = 8$; $n_F = 2$; $E = 6J$

$$\sum_{\langle i,j \rangle} |h_i - h_j| = 12.$$

Il est facile de voir que cette énergie est donnée pour toute configuration par le hamiltonien :

$$H = \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} |h_i - h_j| \qquad \text{(II.2)}$$

où la somme porte sur les paires de plus proches voisins.

En généralisant l'interaction à une fonction quelconque V (paire, minimale à l'origine, croissant assez vite à l'infini), nous sommes conduits à l'action suivante :

$$S = \sum_{\langle i,j \rangle} V(h_i - h_j) \qquad \text{(II.3)}$$

V contient un paramètre β de température inverse.

1.b) Choix des observables

Les quantités intéressantes pour l'étude de la transition rugueuse doivent nous renseigner sur l'état de la surface : est-elle localisée et lisse, ou bien délocalisée et rugueuse ? Nous considèrerons deux types d'observables :

* La distribution de probabilité de la différence d'altitude entre deux points éloignés :

$$p(z, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \delta(h(\vec{r}_1) - h(\vec{r}_2) - z) \rangle \qquad \text{(II.4)}$$

* La distribution de probabilité de l'altitude en un point :

$$q(z, \vec{r}) = \langle \delta(h(\vec{r}) - z) \rangle_0 \qquad \text{(II.5)}$$

Où l'indice 0 signifie que l'on a brisé l'invariance par translation globale : $h(\vec{r}) \longrightarrow h(\vec{r}) + \delta$, par des conditions aux limites :

- soit $h \equiv 0$ sur un grand contour englobant le point $\vec{r}$; ce cadre rigide étant l'analogue de la boucle de Wilson.

- soit $h \equiv 0$ sur les bords du réseau, supposé fini de taille L.

Pour chacun de ces deux profils, on peut s'intéresser à différentes quantités, telles que :

$$p_0 = p(0, \vec{r}_1, \vec{r}_2)\Big|_{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \to \infty} \quad \text{ou} \quad q_0 = q(0, \vec{r})\Big|_{L \to \infty} \qquad \text{(II.6)}$$

$$\langle z^2 \rangle = \sum_z z^2 p(z) \quad \text{ou} \quad \sum_z z^2 q(z) \qquad \text{(II.7)}$$

Nous étudierons ces quantités après les avoir traduites dans le langage de modèles connus de la Mécanique Statistique à deux dimensions.

2) TRANSFORMATIONS DE DUALITE

L'opération très générale de dualité transforme un modèle, défini sur un réseau en dimension d , à symétrie globale ou locale, dont les interactions appartiennent à des p-faces, en son modèle dual, à interactions définies sur les $(d-p)$-faces. Cette opération échange en général hautes et basses températures, paramètres d'ordre et de désordre. Nous suivrons ici l'esprit et les notations de l'article de revue très complet de R. Savit[26].

2.a) Exemple du modèle d'Ising

C'est historiquement le premier exemple sur lequel la dualité fut utilisée, par Kramers et Wannier[27], dans le cas $d = 2$. Nous allons regarder successivement les cas $d = 1,2,3$.

$\boxed{d=1}$: La fonction de partition du système de N spins est :

$$Z = \sum_{\{S_i\}} \prod_i \exp \beta S_i S_{i+1} \qquad \text{(II.8)}$$

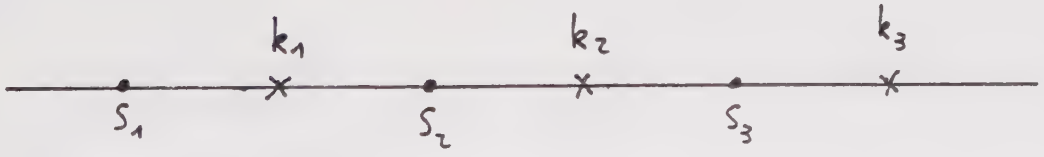
Introduisons sur chaque site i une variable $k \in \{0;1\}$, dite variable duale de S_i, telle que :

$$\left| \begin{array}{l} Z = \sum_{\{S_i\}} \prod_i \sum_k C_k (S_i S_{i+1})^k \\ \text{avec} \quad C_0 = \operatorname{ch} \beta \; ; \quad C_1 = \operatorname{sh} \beta . \end{array} \right. \qquad \text{(II.9)}$$

La somme peut se réarranger en :

$$Z = \sum_{\{k_i\}} \prod_i C_{k_i} \prod_i \sum_{\{S=\pm 1\}} S^{(k_i + k_{i+1})} \qquad \text{(II.10)}$$

Chaque somme sur $S = \pm 1$ donne une fonction δ_2 de Kronecker dans $\mathbb{Z}_2$. Les variables de configuration sont les k_i, qu'il est naturel de situer sur les noeuds du réseau dual (ici, le réseau initial est l'ensemble des points d'abscisse entière, le réseau dual l'ensemble des points d'abscisse demi-entière):



Le problème dual est trivial : les deltas de Kronecker imposent que tous les k_i soient égaux à une même valeur k, ce qui donne le résultat bien connu :

$$Z = (2ch\beta)^N + (2sh\beta)^N \qquad (II.11)$$

La fonction de corrélation à deux points est donnée par :

$$\langle S_0 S_L \rangle = Z^{-1} \sum_{\{S_i\}} S_0 S_L \prod_i \exp \beta S_i S_{i+1} \qquad (II.12)$$

La somme sur les variables S donnera maintenant :

$$\begin{cases} 2\,\delta_2(k_i + k_{i+1}) \text{ pour } i \neq 0, L \\ 2\,\delta_2(1 + k_i + k_{i+1}) \text{ pour } i = 0 \text{ et } L \end{cases} \qquad (II.13)$$

D'où le résultat (exact) :

$$\langle S_0 S_L \rangle = Z^{-1} \left[(2ch\beta)^{N-L} (2sh\beta)^L + (2ch\beta)^L (2sh\beta)^{N-L} \right] \qquad (II.14)$$

Qui donne à la limite thermodynamique :

$$\langle S_0 S_L \rangle = \exp - \frac{L}{\xi} \quad \text{avec} \quad \xi = - \frac{1}{\ln th \beta} \qquad (II.15)$$

$\boxed{d = 2}$: La fonction de partition est maintenant :

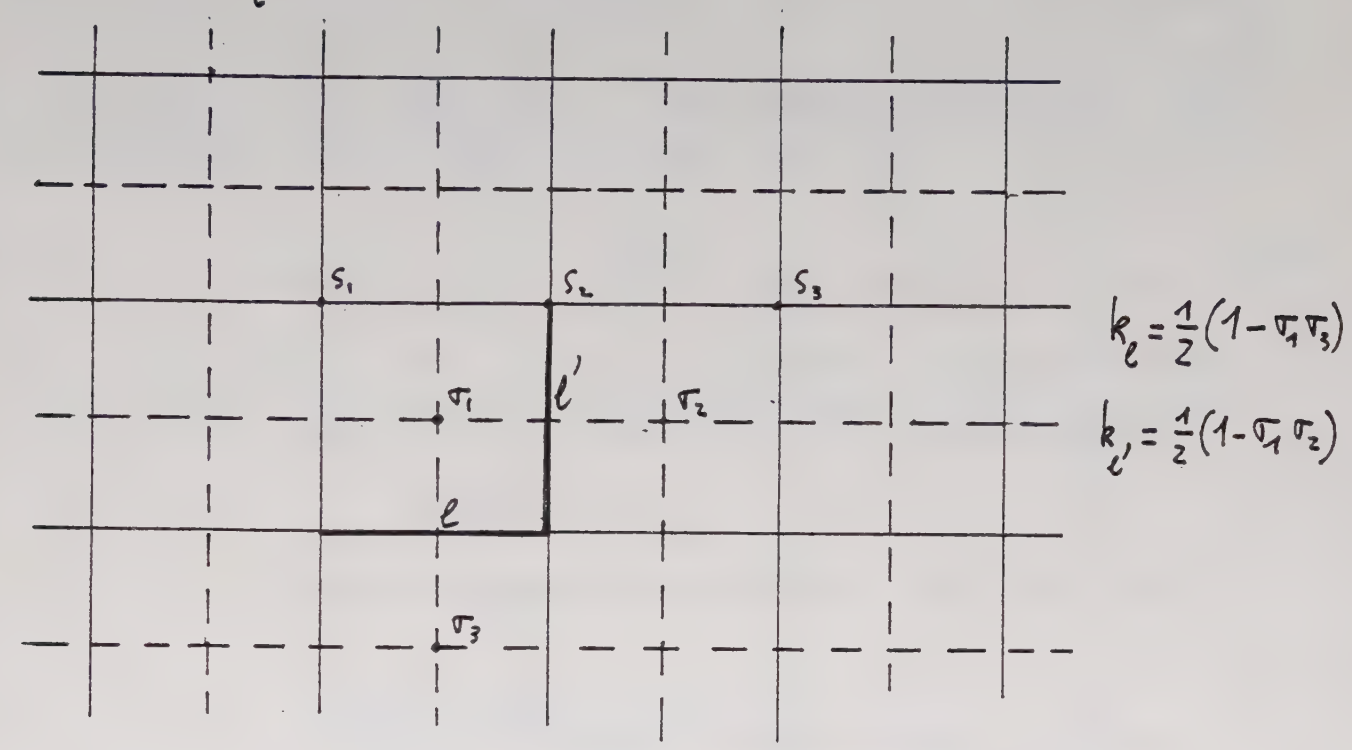
$$Z = \sum_{\{S_i\}} \prod_{\langle i,j \rangle} \exp \beta S_i S_j \qquad (II.16)$$

Introduisons une variable k_ℓ appartenant à $\{0;1\}$ sur chaque lien ℓ. L'analogue de (II.10) est alors :

$$Z = \sum_{\{k_\ell\}} \prod_\ell C_{k_\ell} \prod_i \sum_{S=\pm 1} S^{\sum k_\ell} \qquad (II.17)$$

L'exposant de S est la somme algébrique des variables k attachées aux 4 liens aboutissant au site i. Les 2N variables k_ℓ sont soumises aux N contraintes $\sum k_\ell = 0$ dans Z_2. Une paramétrisation simple des N variables indépendantes est l'introduction de variables duales σ_i appartenant à $\{-1, +1\}$, définies

sur les noeuds du réseau dual (centres des plaquettes du réseau initial), et de fixer les k_ℓ de la façon suivante :



———— : réseau initial — — — — — : réseau dual

On obtient finalement l'expression suivante pour Z :

$$Z = (\mathrm{sh}\, 2\beta)^N \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle i,j \rangle} \exp \tilde{\beta}\, \sigma_i \sigma_j \qquad \text{(II.18)}$$

On reconnait une fonction de partition de modèle d'Ising à la température $\tilde{\beta}$ telle que :

$$e^{-2\tilde{\beta}} = \mathrm{th}\, \beta \,, \quad \text{ou} \quad \mathrm{sh}\, 2\beta \,.\, \mathrm{sh}\, 2\tilde{\beta} = 1 \qquad \text{(II.19)}$$

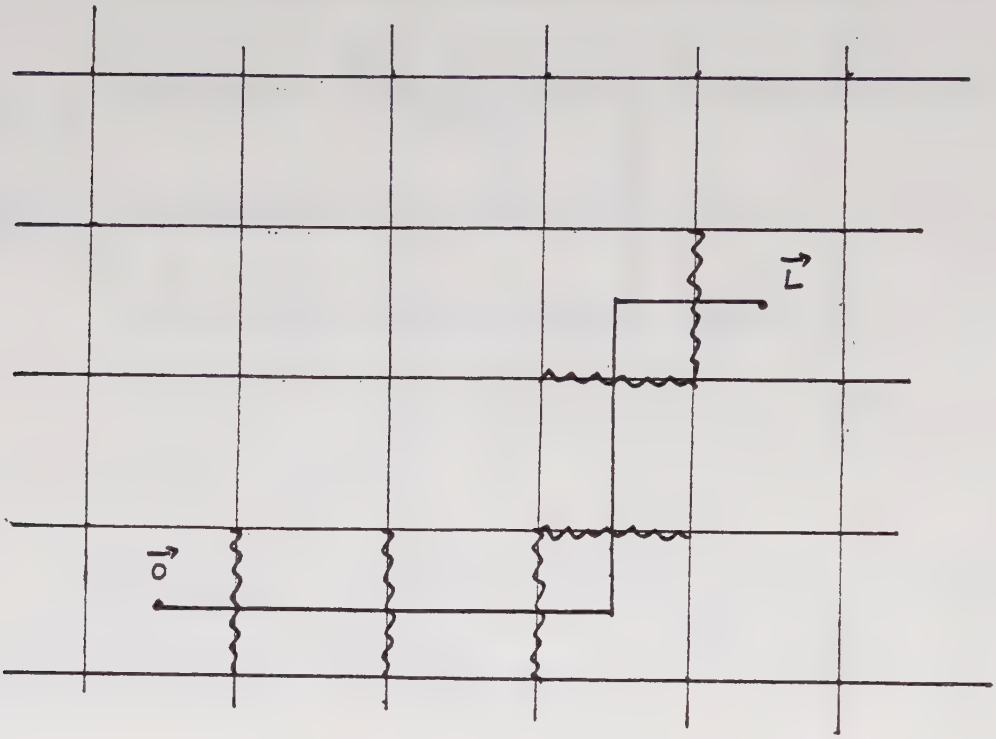
L'énergie libre du modèle d'Ising vérifie donc l'équation fonctionnelle de dualité :

$$-f(\beta) = \ln \mathrm{sh}\, 2\beta - f(\tilde{\beta}) \qquad \text{(II.20)}$$

En particulier, le point critique unique est nécessairement le point d'auto-dualité :

$$sh 2\beta_c = 1 \quad , \quad \text{ou} \quad t_c = th\,\beta_c = \sqrt{2} - 1 \tag{II.21}$$

Pour le calcul de la fonction à deux points, on est amené à satisfaire les équations de conservation (II.13), où $\vec{o}$ et $\vec{L}$ sont deux points du réseau initial. Il suffit pour cela, en termes des spins duaux σ_j , de changer le signe de $\tilde{\beta}$ sur les liens duaux croisant une ligne arbitraire joignant $\vec{o}$ et $\vec{L}$:



~~~~ : liens "frustrés" (dont le signe de l'interaction a été changé)

On a alors :

$$\langle S_o S_L \rangle_\beta = \frac{Z^F(\tilde{\beta})}{Z(\tilde{\beta})} \tag{II.22}$$

Où le numérateur est la fonction de partition frustrée comme l'indique la figure ci-dessus.

$d = 3$: L'analogue de (II.10 et 17) est :

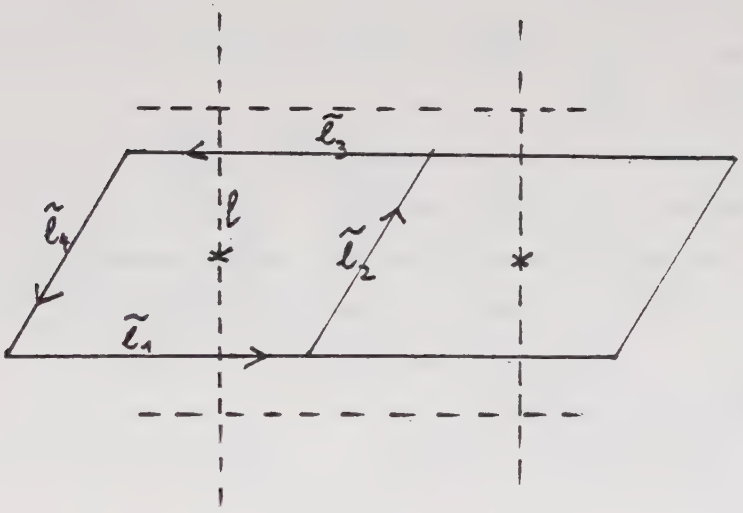
$$Z = \sum_{\{k_\ell\}} \prod_{\ell} c_{k_\ell} \prod_{i} \sum_{s} s^{\sum k_\ell} \tag{II.23}$$
~~~~

Où l'exposant de S est maintenant la somme algébrique de six variables de liens. Les 3N variables de liens soumises aux N contraintes $\sum k_\ell = 0$ dans $\mathbb{Z}_2$ peuvent se traduire par 2N variables définies sur les liens duaux.

Le réseau dual est encore cubique ; ses noeuds sont les centres des cubes du réseau initial. Un choix simple de variables duales est :

$$k_\ell = \frac{1}{2}\left(1 - \prod U(\tilde{\ell})\right) \qquad \text{(II.20')}$$

où le produit porte sur les 4 liens $\tilde{\ell}$ de la plaquette duale traversée par le lien initial ℓ (parmi ces 3N variables $U(\tilde{\ell})$, seules 2N d'entre-elles sont indépendantes).



$$k_\ell = \frac{1}{2}\left(1 - U_{\tilde{\ell}_1} U_{\tilde{\ell}_2} U_{\tilde{\ell}_3} U_{\tilde{\ell}_4}\right)$$

On obtient finalement :

$$Z = Z^N (\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{ch}\,\beta)^{\frac{3N}{2}} \; Z_G(\tilde{\beta}) \qquad \text{(II.21')}$$

où $Z_G(\tilde{\beta})$ est la fonction de partition du modèle de jauge sur réseau, à symétrie (locale) $\mathbb{Z}_2$, avec l'action (I.16).

Le modèle d'Ising donne donc par transformation de dualité les modèles suivants :

$d=1$: modèle trivial
$d=2$: modèle d'Ising (auto-dual)
$d=3$: théorie de jauge $\mathbb{Z}_2$ (action de Wilson)
$d\geqslant 4$: théorie d'hyperjauge $\mathbb{Z}_2$ (variables appartenant aux $(d-2)$-faces et interactions définies sur les $(d-1)$-faces).

2.b) Transformation du modèle S.O.S.

La fonction de partition du modèle S.O.S. est :

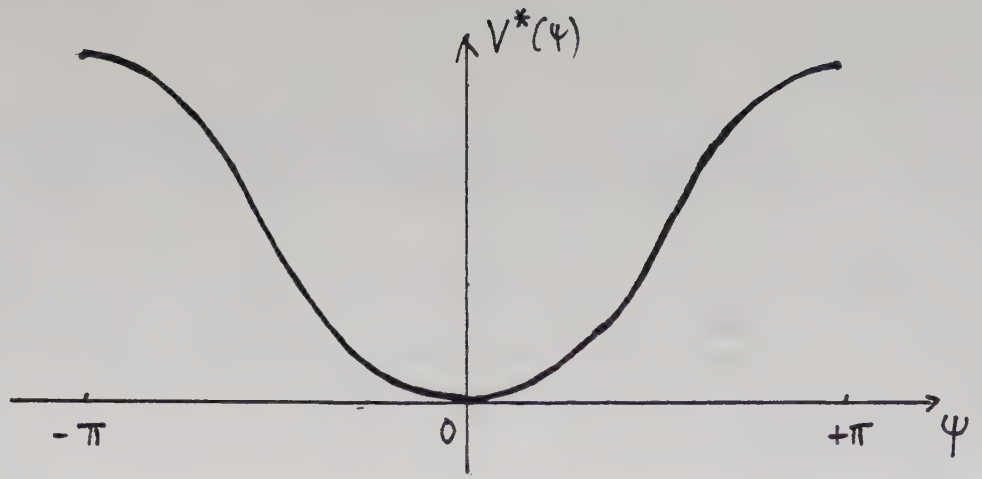
$$Z = \sum_{\{h_i\}} \prod_{<i,j>} \exp - V(h_i - h_j) \qquad \text{(II.22')}$$

Dans l'exemple du modèle d'Ising, les variables initiales S_i appartiennent à $\mathbb{Z}_2$, et les variables duales sont les σ_j, appartenant aussi à $\mathbb{Z}_2$, qui est auto-dual. Ici, les variables initiales h_i appartiennent à $\mathbb{Z}$: les variables duales doivent être prises dans le groupe dual $U(1) \sim \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$: ce sont des angles.

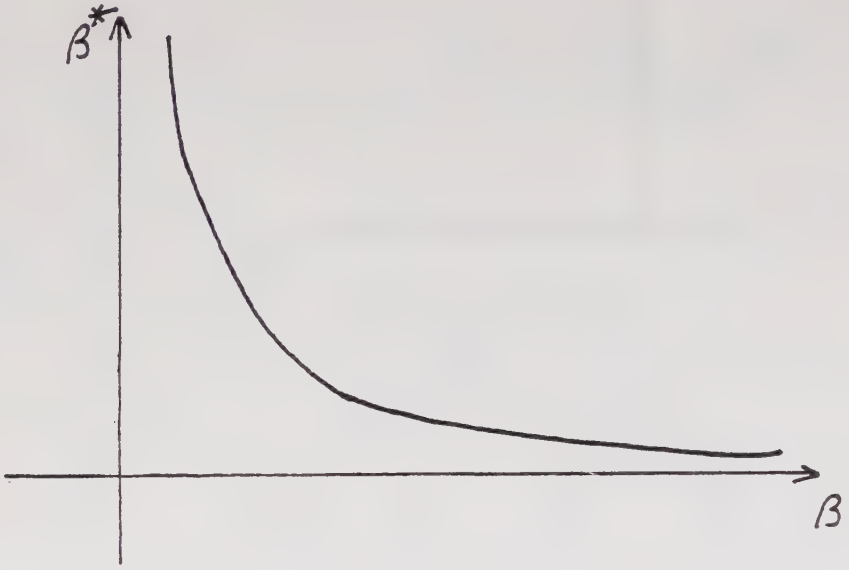
Introduisons une variable angulaire ψ_ℓ sur chaque lien ℓ, ainsi que l'interaction duale définie par :

$$\left| \begin{array}{l} e^{-V^*(\psi)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-V(n) + in\psi} \\ e^{-V(n)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi}\, e^{-V^*(\psi) - in\psi} \end{array} \right. \qquad \text{(II.23')}$$

V^* est une fonction paire et 2π-périodiques de ψ (pour un choix convenable de V), dont l'allure est la suivante :



V^* contient un paramètre de température inverse β^* qui dépend de façon monotone de β , comme c'était le cas en (II.19) pour le modèle d'Ising :



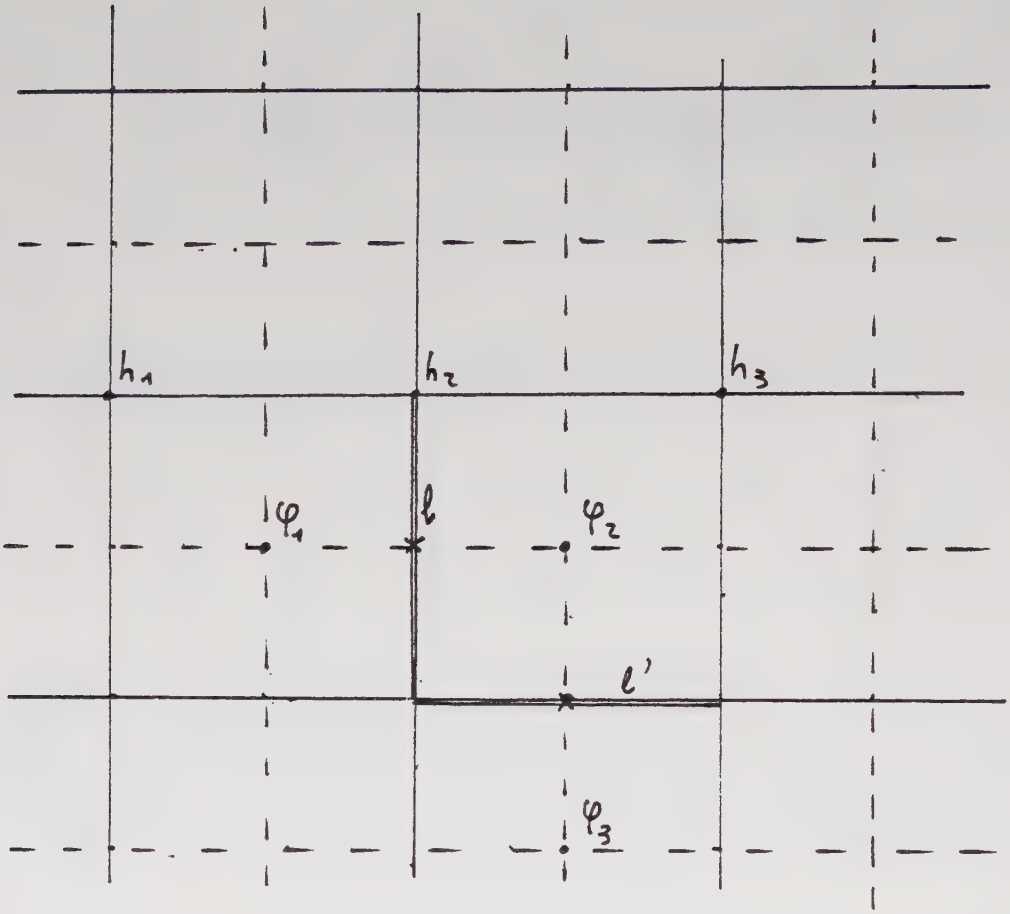
Après introduction de la représentation intégrale (II.23') et réarrangement, on obtient :

$$Z = \int \prod_\ell \frac{d\psi_\ell}{2\pi} \prod_\ell e^{-V^*(\psi_\ell)} \prod_i \sum_h e^{-ih\Phi_i} \qquad \text{(II.24)}$$

où le dernier produit porte sur les sites, et Φ_i est la somme algébrique des quatre ψ_ℓ aboutissant à chaque site i .

Ceci donne les N lois de conservation $\Phi_i = 0$ qui relient entre-elles les 2N variables angulaires ψ_ℓ . Une paramétrisation simple respectant

ces lois est obtenue en introduisant N angles φ sur les noeuds du réseau dual :



$$\Psi_\ell = \varphi_2 - \varphi_1 \quad ; \quad \Psi_{\ell'} = \varphi_2 - \varphi_3 \, .$$

On obtient finalement :

$$Z = \int \prod_i \frac{d\varphi_i}{2\pi} \exp - \sum_{\langle i,j \rangle} V^*(\varphi_i - \varphi_j) \qquad \text{(II.25)}$$

On reconnait la fonction de partition d'un modèle X-Y généralisé, ou modèle à symétrie globale $U(1)$ (La dénomination "modèle X-Y" est réservée au cas $V^*(\Psi) = -\beta^* \cos \Psi$).

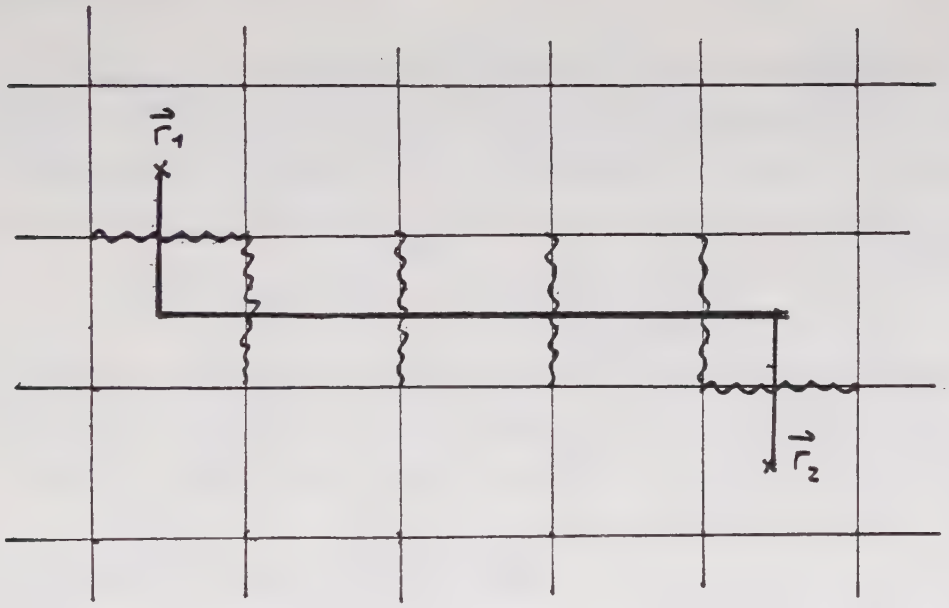
Transformons maintenant la fonction à deux points donnée par (II.4) :

$$\rho(z,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = Z^{-1} \sum_{\{h_i\ t_q\ h_1-h_2=z\}} \prod_{<ij>} e^{-V(h_i-h_j)} \qquad \text{(II.26)}$$

Les deux lois de conservation associées aux sites $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ dans (II.24) sont remplacées par :

$$\sum_{\{h_1,h_2\ t_q\ h_1-h_2=z\}} e^{-i(h_1\xi_1+h_2\xi_2)} = 2\pi\,\delta(\xi_1+\xi_2)\,e^{-iz\xi_1} \qquad \text{(II.27)}$$

Une façon simple de satisfaire toutes les lois de conservation est d'introduire, par analogie avec le cas d'un modèle d'Ising, une frustration d'amplitude σ sur tous les liens duaux croisant une ligne arbitraire entre $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$:



~~~~ : liens "frustrés" d'un angle σ

$$\rho(z,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi}\, e^{iz\sigma}\, \rho^*(\sigma) \qquad \text{(II.28)}$$

où $\rho^*(\sigma) = \dfrac{Z^F(\sigma)}{Z}$ et $Z^F(\sigma)$ est la fonction de partition avec les interactions frustrées.

Notons que cette transformation figure à de nombreux endroits dans la littérature[28,29,30], sans que ses implications physiques soient toujours clairement exposées.
~~~~

3) NATURE DE LA TRANSITION RUGUEUSE

3.a) La transition de Kosterlitz-Thouless

Les modèles à symétrie continue, comme notre modèle X-Y généralisé (II.25), n'ont pas de phase de basse température ordonnée pour $d \leq 2$. Ceci fut démontré par Mermin et Wagner (référence [7] déjà citée) en 1966, mais c'est Peierls qui montra le premier[31] en 1935 qu'un cristal bidimensionnel voit son ordre à longue portée détruit par des phonons mous (de longueur d'onde λ beaucoup plus grande que la maille a), qui font diverger le carré moyen du déplacement d'un atome avec la taille du cristal :

$$\langle \vec{x}^2 \rangle \sim k_B T \ln \frac{L}{a} \qquad \text{(II.29)}$$

Certains modèles bidimensionnels ont cependant une transition de phase sans brisure de symétrie, qui fut étudiée par Kosterlitz et Thouless[32,33]. Un rôle essentiel est joué par les vortex (ou tourbillons), qui sont des singularités topologiques stables. Développons l'action (II.25) au voisinage de la situation où les spins sont ordonnés :

$$S \approx -\frac{J}{T} \sum_{\langle i,j \rangle} (\varphi_i - \varphi_j)^2 \qquad \text{(II.30)}$$

L'énergie d'un vortex isolé est alors : (R est la taille du système, et a la maille du réseau)

$$E_V = 2\pi J \ln \frac{R}{a} \qquad \text{(II.31)}$$

Son entropie est :

$$S_V = k_B \ln \frac{R^2}{a^2} \qquad \text{(II.32)}$$

car la position de son centre suffit à le déterminer.
On en déduit son énergie libre :

$$F_V = 2(\pi J - k_B T) \ln \frac{R}{a} \qquad \text{(II.33)}$$

Le comportement du système est donc gouverné par la position de T par rapport à :

$$T_c = \frac{\pi J}{k_B} \qquad \text{(II.34)}$$

En particulier, des vortex isolés existent pour $T > T_c$. Cette discussion est qualitativement en accord avec les résultats du groupe de renormalisation[33], qui prévoit :

* pour $T > T_c$, les vortex sont libres (une fraction finie d'entre-eux sont isolés). Les fonctions de corrélation décroissent exponentiellement.

* pour $T < T_c$, les vortex sont associés en paires ou molécules vortex-antivortex. Les corrélations décroissent en loi de puissance :

$$\langle e^{i\varphi(\vec{0})} . e^{-i\varphi(\vec{r})} \rangle \sim r^{-\eta(T)} \qquad \text{(II.35)}$$

avec un exposant critique η variant avec T . Cette phase de basse température est invariante d'échelle.

* La transition elle-même est d'ordre infini. La partie singulière Δf de l'énergie libre, la longueur de corrélation ξ , et l'écart à la température critique $t = \frac{T - T_c}{T_c}$, sont reliés par :

$$\Delta f \sim \xi^{-2} \sim \exp(-cst.\, t^{-1/2}) \qquad \text{(II.36)}$$

Ce type de singularité essentielle est inhabituel en théorie des phénomènes critiques, où les singularités sont, en général, algébriques.

3.b) Relations avec le gaz coulombien

Kosterlitz et Thouless ont montré que la transition du modèle X-Y est due aux vortex : les faibles excitations non-topologiques que sont les ondes de spins n'y jouent aucun rôle. Un vortex de charge Q situé en $\vec{r}$ et un vortex de charge Q' situé en $\vec{r}'$ interagissent par le potentiel :

$$V(\vec{r} - \vec{r}') = -2\pi J Q Q' \ln \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{a} \qquad \text{(II.37)}$$

V n'est autre que le potentiel coulombien en dimension 2.

La phase de haute température est une phase plasma, où les charges sont libres, et où deux d'entre-elles s'écrantent avec une longueur de Debye de l'ordre de ξ . La phase de basse température est une phase diélectrique, sans charges libres, donc isolante, et sans phénomène d'écran (longueur de Debye infinie).

Il existe en outre une relation directe entre un modèle S.O.S. particulier, dit gaussien discret, correspondant au choix de l'interaction $V = \beta_{GD}(h_i - h_j)^2$ et le gaz coulombien.

La fonction de partition du modèle gaussien discret est :

$$Z_{GD} = \sum_{\{h_i\}} \prod_{<i,j>} \exp - \beta_{GD} (h_i - h_j)^2 \qquad \text{(II.38)}$$

Pour calculer cette somme, nous allons généraliser à N variables entières la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{h \in Z} f(h) = \sum_{m \in Z} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i m x} f(x)\, dx \qquad \text{(II.39)}$$

Ce qui nous donne (en introduisant un entier m_i par site) :

$$Z_{GD} = \sum_{\{m_i\}} \int Dh \exp \left[-\beta_{GD} \sum_{<i,j>} (h_i - h_j)^2 + 2\pi i \sum_i m_i h_i \right] \qquad \text{(II.40)}$$

L'intégrale figurant ici est l'intégrale gaussienne bien connue :

$$\int Dx \exp \left[-\frac{1}{2} A_{ij} x_i x_j + J_i x_i \right] = \left(\mathrm{Det} \frac{A}{2\pi} \right)^{-1/2} \exp \frac{1}{2} \Delta_{ij} J_i J_j \qquad \text{(II.41)}$$

où Δ est la matrice inverse de A .

On en déduit :

$$Z_{GD} = Z_0 \sum_{\{m_i\}} \exp \left[-\frac{\pi^2}{\beta_{GD}} \sum_{i,j} m_i m_j \Delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right] \qquad \text{(II.42)}$$

Où Z_0 est la fonction de partition du système où les hauteurs sont réelles (et non entières) : ce modèle de membrane n'a pas de transition ; et où Δ est le propagateur, c'est-à-dire l'inverse du laplacien discret, qui est bien représenté par :

$$\Delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \sim -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{a} \qquad \text{(II.43)}$$

dès que $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ est supérieur ou de l'ordre de a .

On reconnait ici la fonction de partition de l'ensemble des charges m_i, interagissant par le potentiel (II.37), à la température T telle que :

$$T = 4J\beta_{GD} \tag{II.44}$$

Les deux modèles ont des températures inverses l'une de l'autre.

Traduisons enfin notre observable (II.4) dans le langage du gaz coulombien. On a :

$$\rho(\zeta, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = Z_{GD}^{-1} \sum_{\{h_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{-\beta_{GD}(h_i - h_j)^2} \delta(h_1 - h_2 - \zeta) \tag{II.45}$$

Pour trouver l'analogue de (II.40), écrivons la fonction δ de la façon suivante (en découpant l'axe réel en segments de longueur 1) :

$$\delta(h_1 - h_2 - \zeta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} e^{(2\pi i m_1 + i\sigma)(h_1 - h_2 - \zeta)} \tag{II.46}$$

Pour les sites autres que $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, nous transformons encore les sommes sur des h entiers en intégrales, ce qui conduit à l'expression :

$$\rho(\zeta, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} e^{i\zeta\sigma} \rho^*(\sigma) \tag{II.47}$$

où $\rho^*(\sigma) = \dfrac{\tilde{Z}(\sigma)}{Z}$ et $\tilde{Z}(\sigma)$ est la fonction de partition du système de charges :

$$\tilde{m}_i = m_i + \frac{\sigma}{2\pi}(\delta_{i1} - \delta_{i2}) \tag{II.48}$$

Ce résultat, très analogue à (II.28), a néanmoins un sens physique plus clair : $\rho^*(\sigma)$, qui était une fonction de frustration dans le modèle X-Y, est maintenant relié à l'énergie libre due à deux charges opposées $\pm \dfrac{\sigma}{2\pi}$ placées aux sites $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.

3.c) Deux calculs simples

Nous allons présenter ici deux calculs de physique classique qui prévoient le comportement de $\rho^*(\sigma)$, transformée de Fourier du profil de l'interface.

Modèle X-Y et électrostatique. Dans le langage du modèle X-Y, la quantité $-\ln \rho^*(\sigma)$ est la différence d'énergie (libre) ΔE due à une frustration d'amplitude σ le long d'une ligne joignant $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$. Evaluons cette quantité en passant

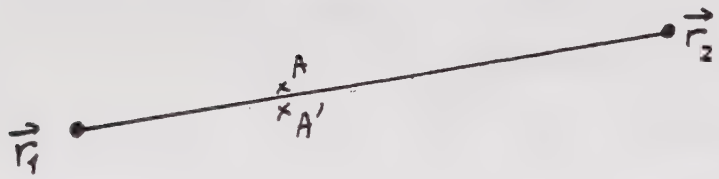
au cas d'un milieu continu, où les variables angulaires sont remplacées par un champ $\phi(\vec{r})$. Le hamiltonien est alors :

$$H = J \int d^2r \, (\vec{\nabla}\phi)^2 \qquad \text{(II.49)}$$

Et l'équation du champ est celle de Laplace :

$$\Delta \phi = 0 \qquad \text{(II.50)}$$

Le champ ϕ correspondant à notre cas doit être singulier en deux points $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, et présenter une discontinuité d'amplitude σ le long du segment de droite joignant ces points :



$$\phi(A) - \phi(A') = \sigma$$

La solution de ce problème est :

$$\phi(\vec{r}) = A\,\mathrm{Arg}\left[\frac{z - z_1}{z - z_2}\right]^{\frac{\sigma}{2\pi}} \qquad \text{(II.51)}$$

où l'on a représenté les points par leur affixe complexe, et où l'on a choisi la détermination principale de l'argument. La partie réelle de la même fonction est :

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| \qquad \text{(II.52)}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann liant ϕ et ψ, et une intégration par parties, donnent :

$$\Delta E = -J \int d^2 r \; \psi . \Delta \psi \qquad \text{(II.53)}$$

En remplaçant les deux charges ponctuelles par deux petits disques de rayon a on obtient :

$$\Delta E = \frac{J}{\pi} \sigma^2 \ln \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{a} \qquad \text{(II.54)}$$

Ce résultat reste qualitativement correct tant que les vortex sont liés, donc pour $T < T_c$:

$$-\ln p^*(\sigma) \sim \sigma^2 \ln \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{a} \qquad (T < T_c) \qquad \text{(II.55)}$$

Quant à la phase de haute température, elle contient des vortex libres qui détruisent toute mémoire du système à partir d'une longueur de l'ordre de ξ, et :

$$-\ln p^*(\sigma) \sim \sigma^2 \ln \frac{\xi}{a} \qquad (T > T_c) \qquad \text{(II.56)}$$

dès que $L = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ est supérieur à ξ.

Gaz coulombien et approximation de Debye. Notre quantité $\ln p^*(\sigma)$ est maintenant l'énergie libre de deux charges $\pm \frac{\sigma}{2\pi}$, placées dans le gaz coulombien à une grande distance L l'une de l'autre.

Pour $T < T_c$, le système est un diélectrique : le potentiel vu par les deux charges est simplement corrigé par une constante diélectrique $\varepsilon(T)$:

$$-\ln p^*(\sigma) \sim \frac{\sigma^2}{\varepsilon(T)} \ln \frac{L}{a} \qquad \text{(II.57)}$$

Ce qui est en accord avec (II.55).

Pour $T > T_c$, le système est un plasma où toutes les valeurs entières de la charge peuvent exister. Nous allons nous limiter au cas où les charges valent ± 1, ce qui est raisonnable pour T supérieur mais de l'ordre de T_c. Comme il y a écrantage, il suffit de calculer l'énergie libre due à une seule

charge, car nos deux charges tests sont très éloignées.

L'approximation de Debye consiste à remplacer les charges du plasma par des distributions continues $\rho_+(\vec{r})$ et $\rho_-(\vec{r})$. Le potentiel électrostatique est alors solution de l'équation de Poisson :

$$-\Delta V = \frac{1}{\varepsilon}\left[\rho_+ + \rho_- + \frac{\sigma}{2\pi}\,\delta(\vec{r})\right] \tag{II.58}$$

La cohérence du problème est d'exiger que les charges soient réparties dans le potentiel qu'elles ont créé selon une formule de Boltzmann :

$$\rho_\pm(\vec{r}) = \pm\rho_0 \exp \mp \beta V(\vec{r}) \tag{II.59}$$

Ce qui conduit à l'équation suivante, après linéarisation :

$$\left(-\Delta + \xi^{-2}\right) V = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon}\,\delta(\vec{r}) \tag{II.60}$$

Dont la solution est :

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon}\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\frac{e^{i\vec{q}.\vec{r}}}{q^2+\xi^{-2}} \tag{II.61}$$

Où la longueur de Debye-Hückel ξ est donnée par :

$$\xi^{-2} = \frac{2\beta\rho_0}{\varepsilon} \tag{II.62}$$

Deux cas particuliers intéressants sont les dimensions 2 et 3, où la solution s'écrit :

$$\left|\begin{array}{l} V_{d=2}(r) = \dfrac{\sigma}{4\pi^2\varepsilon}\,K_0\left(\dfrac{r}{\xi}\right) \\ V_{d=3}(r) = \dfrac{\sigma}{8\pi^2\varepsilon}\,\dfrac{e^{-r/\xi}}{r} \end{array}\right. \tag{II.63}$$

Pour calculer l'énergie d'interaction ΔE de notre charge-test avec le plasma, nous allons suivre la méthode de Landau ([6], § 75), qui remarque que cette quantité s'obtient en "plaçant" la charge-test dans la partie "d'interaction" du potentiel V :

$$V_I(0) = \lim_{r\to 0}\left[V(r,\xi) - V(r,\xi=\infty)\right] \tag{II.64}$$

Dans le cas tridimensionnel, ceci donne :

$$\Delta E_{d=3} = - \frac{\sigma^2}{8\pi^2 \varepsilon} \frac{1}{\xi} \qquad \text{(II.65)}$$

Dans le cas bidimensionnel, le développement de la fonction de Bessel K_0 valable pour un argument petit :

$$K_0(z) = - \ln z + \ln 2 - \gamma + O(z^2 \ln z) \qquad \text{(II.66)}$$

(où γ est la constante d'Euler), conduit au résultat :

$$\Delta E_{d=2} = \frac{\sigma^2}{4\pi^2 \varepsilon} \ln \frac{\xi}{a} \qquad \text{(II.67)}$$

où a est une longueur fondamentale du problème, de l'ordre de la maille du réseau.

Le résultat de l'approximation de Debye est donc :

$$- \ln p^*(\sigma) \sim \begin{cases} \sigma^2 \ln \frac{L}{a} & (T < T_c) \\ \sigma^2 \ln \frac{\xi}{a} & (T > T_c) \end{cases} \qquad \text{(II.68)}$$

en accord avec (II.55 et 56).

Remarque importante :

Les formules (II.65 et 67) font apparaître un paradoxe : comment deux charges opposées $\pm \frac{\sigma}{2\pi}$ peuvent-elles avoir une énergie d'interaction positive si d=2, et négative si d=3 ?

Rappelons d'abord l'expression du noyau de Newton $N_d(r)$, défini comme étant la solution à symétrie sphérique de l'équation :

$$- \Delta N_d = \delta(\vec{r}) \qquad \text{(II.69)}$$

Cette solution a des propriétés différentes selon la valeur de d :

pour d≠2, on a :

$$N_d(r) = \frac{1}{C_d \, r^{d-2}} \qquad \text{(II.70)}$$

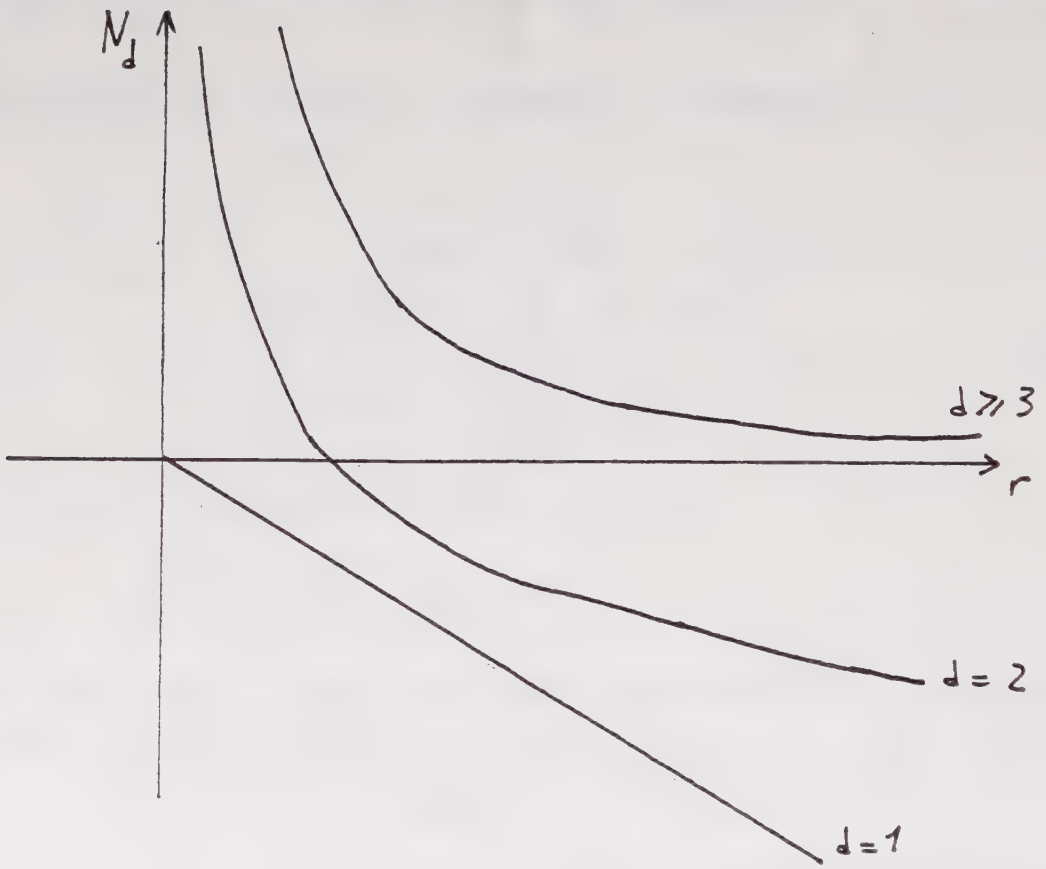
où la constante de Poisson C_d est reliée à l'aire de la sphère unité S_d, au volume de la boule unité ω_d, et à la dimension d, par :

$$\frac{C_d}{d-2} = S_d = d\,\omega_d = \frac{2\,\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \qquad \text{(II.71)}$$

pour d=2, on a la solution (correspondant formellement à une puissance zéro):

$$N_2(r) = -\frac{1}{2\pi}\,\ln\frac{r}{a} \qquad \text{(II.72)}$$

Ce noyau de Newton, qui est l'énergie d'interaction coulombienne de deux charges unités de même signe, a l'allure suivante, pour des dimensions entières :



En particulier, pour $d \lesssim 2$, il est impossible d'attribuer la valeur zéro au potentiel à l'infini, ce que l'on fait habituellement à d=3 : seules les variations avec r de ce potentiel ont un sens, ce qui résout le paradoxe.

Ces propriétés du noyau de Newton ont une conséquence physique, comme l'expliquent Chui et Weeks[34] : seul le cas marginal d=2, correspondant à une croissance logarithmique du potentiel, autorise une transition de phase plasma (conducteur)/diélectrique (isolant) à une température finie (que nous avons

évaluée en II.34). Pour $d > 2$, le potentiel étant borné, l'entropie l'emporte toujours sur l'énergie, et les charges sont libres à toute température non-nulle ; pour $d < 2$, le potentiel, croissant comme la puissance (2-d) de l'éloignement, maintient les charges liées en paires de rayon moyen fini quelle que soit la température : l'énergie l'emporte toujours sur l'entropie.

3.d) Résultats

Avant de déduire du paragraphe précédent nos résultats concernant la transition rugueuse, il nous faut remarquer que notre étape essentielle (l'évaluation de $\ln p^*(\sigma)$) est fondée sur deux raisonnements physiques, qui mettent en évidence les propriétés caractéristiques du modèle étudié. Nos résultats sont en parfait accord avec ceux de Ohta et Kawasaki[35]. Dans cet article (dont nous n'avions pas connaissance lors de l'élaboration de ce travail), ils présentent des calculs de groupe de renormalisation semblables à ceux de Kosterlitz ([33] , déjà cité), dont ils tirent la même information que nous, au moyen de l'approximation des cumulants, et dans un langage beaucoup plus formel que le nôtre.

Nous allons noter T la température initiale de notre modèle S.O.S., T_R la température de transition rugueuse, T^* la température (duale de T) du gaz coulombien ou du modèle X-Y généralisé, et T_c^* la température (duale de T_R) de transition de ces modèles.

La transformée de Fourier $p^*(\sigma)$ de notre observable $p(\zeta, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ est donnée dans les deux phases par une expression semblable :

$$-\ln p^*(\sigma) \sim \lambda \sigma^2 \qquad \text{(II.73)}$$

avec $\lambda \sim \ln \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{a}$ pour $T > T_R$ ou $T^* < T_c^*$ (II.74)

$\lambda \sim \ln \frac{\xi}{a}$ pour $T < T_R$ ou $T^* > T_c^*$ et $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \gg \xi$.

Notre observable a donc pour expression :

$$p(\zeta, L) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \, e^{i\zeta\sigma - \lambda\sigma^2} \qquad \text{(II.75)}$$

où $L = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

Dans tous les cas qui nous intéressent, λ est grand, et l'intégrale sur $[-\pi, +\pi]$ ne diffère que par des termes exponentiellement petits en λ de l'intégrale étendue à tout l'axe réel :

$$\mathcal{P}(z, L) \sim \frac{\exp - \frac{z^2}{4\lambda}}{\sqrt{4\pi\lambda}} \qquad \text{(II.76)}$$

Il en résulte donc une distribution de probabilité gaussienne. Toutes les quantités caractérisant la surface S.O.S. dépendent d'une seule quantité :

$$\lambda(L, T).$$

En particulier, la probabilité de repasser par la même altitude qu'à l'infini est :

$$\mathcal{P}_0 = (4\pi\lambda)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(II.77)}$$

Et tous les moments de la distribution ont une seule "échelle" fixée par λ :

$$\langle z^{2N} \rangle = (4\lambda)^N \frac{\Gamma(N + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \qquad \text{(II.78)}$$

L'épaisseur de la surface, qui est l'écart quandratique moyen de la variable z, est donnée par :

$$\ell = \langle z^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = (2\lambda)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(II.79)}$$

Le comportement de λ , donné par (II.74), nous permet de décrire les deux phases de notre modèle :

<u>phase lisse : $T < T_R$ ou $T^* > T_c^*$</u> : le paramètre λ est une constante dès que l'éloignement L est plus grand que la longueur de corrélation ξ . La surface est donc régulière à grande échelle, et localisée. Lorsque T se rapproche de T_R, λ tend vers l'infini :

$$\lambda \sim \ln \frac{\xi}{a} \sim (T_R - T)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(II.80)}$$

On en déduit la valeur des exposants critiques :

probabilité de localisation : $p_0 \sim (T_R - T)^{1/4}$

"épaisseur" de la surface : $\ell \sim (T_R - T)^{-1/4}$ (II.81)

moments d'ordre 2N : $\langle z^{2N} \rangle \sim (T_R - T)^{-N/2}$

phase rugueuse : $T > T_R$ ou $T^* < T_c^*$: le paramètre λ, qui vaut maintenant $\ln \frac{L}{a}$, fait que la surface est délocalisée par des fluctuations à grande échelle. Pour une portion de surface de taille finie L, on a une épaisseur moyenne ℓ qui diverge :

$$\ell \sim a \left(\ln \frac{L}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(II.82)}$$

et une probabilité de localisation qui tend vers zéro :

$$p_0 \sim \left(\ln \frac{L}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(II.83)}$$

Pour une surface infinie, on ne peut plus parler d'interface : la probabilité de le trouver dans une zone déterminée est rigoureusement nulle.

Remarque : Les dénominations "phase rugueuse", ou "transition rugueuse", peuvent induire en erreur : la surface n'est rugueuse, pour $T > T_R$, qu'à l'échelle macroscopique, ce qui justifie l'emploi de ce terme en physique de la croissance cristalline. A l'échelle de la maille du réseau, rien ne se passe à $T = T_R$: c'est seulement à grande échelle que la surface se délocalise, et perd toute mémoire de ses conditions aux limites.

Notons enfin que les divergences rencontrées ici ne sont que logarithmiques, c'est-à-dire inobservables expérimentalement : pour une taille de cristal raisonnable de 1 cm, on prévoit une largeur .... d'une dizaine d'angströms !

Notre description de la transition rugueuse est en accord qualitatif avec les idées connues depuis les "inventeurs" du phénomène, Burton, Cabrera et Franck. Pour ce qui est des prévisions quantitatives, et en particulier des indices critiques, nous y reviendrons au chapitre III.

4) LE MODELE SOLUBLE DE VAN BEIJEREN

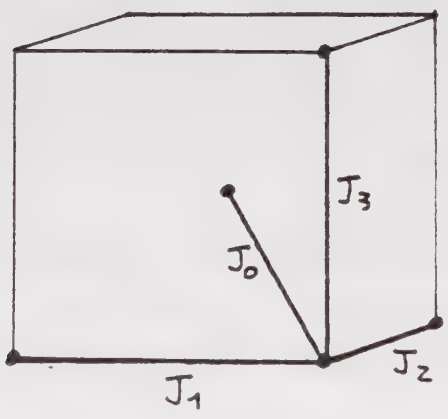
Nous allons présenter ici une version du modèle S.O.S., proposée par Van Beijeren [36], que l'équivalence avec un cas particulier du modèle des six vertex rend exactement soluble. Bien que nos tentatives pour obtenir une expression fermée pour des quantités telles que $\pi(z, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ aient été vaines, ce modèle présente pour nous un double intérêt :

* il confirme la nature de la transition de Kosterlitz-Thouless, et en particulier la forme de la singularité essentielle (II.36) de l'énergie libre.

* il donne une expression exacte d'une autre observable caractéristique de la transition rugueuse : l'énergie de marche, que nous étudierons dans les chapitres III et IV.

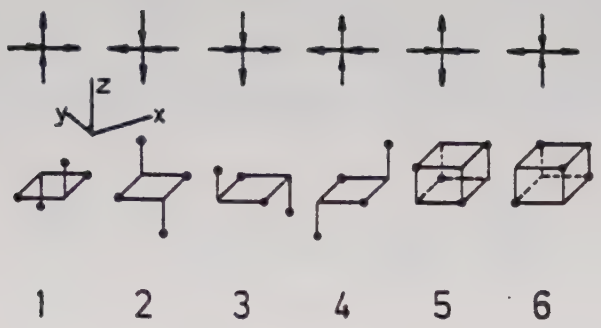
4.a) Du modèle S.O.S. aux six vertex

Van Beijeren part d'un modèle d'Ising anisotrope défini sur un réseau tridimensionnel cubique centré, avec 4 couplages différents :



La limite $J_o \longrightarrow \infty$ de ce modèle est un modèle S.O.S. : une configuration est déterminée par la hauteur de chaque colonne. De plus, les seules différences de hauteurs autorisées entre plus proches voisins sont $\pm \frac{1}{2}$ (en unités de maille du réseau). Chaque configuration est alors reliée de façon biunivoque avec une configuration de flèches, tracées sur le réseau dual, respectant la condition dite "de la glace" (deux flèches entrantes et deux

sortantes à chaque noeud du réseau dual) :



Le modèle ainsi obtenu est précisément le modèle des six vertex, résolu exactement par Lieb, et par Yang et Yang (1967). Les énergies associées aux vertex sont (on se limite au cas isotrope dans le plan horizontal : $J_1 = J_2$) :

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 > 0 \\ \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 . \end{array} \right. \qquad \text{(II.84)}$$

4.b) Résultats

Nous suivons ici deux ouvrages de référence sur le modèle des six vertex : une note de M. Gaudin[37], et un article de revue de Lieb et Wu[38].

Sans donner le détail de la résolution, indiquons que l' "ansatz de Bethe" permet de diagonaliser explicitement la matrice de transfert du problème. Le passage à la limite thermodynamique donne pour l'énergie libre les expressions suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} -f = -K + \frac{\lambda}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-\lambda n}}{n} \, th\, \lambda n \quad \text{pour} \quad \Delta = -ch\,\lambda \leq -1 . \\ \\ -f = -K + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{ch\,\pi\alpha} \ln \frac{ch\,2\mu\alpha - \cos 2\mu}{ch\,2\mu\alpha} \quad \text{pour} \quad \Delta = -\cos\mu \geq -1 . \end{array} \right. \qquad \text{(II.85)}$$

où $\Delta = 1 - \frac{1}{2} e^{2K}$ et $K = \frac{\varepsilon}{k_B T}$. Δ croît de $-\infty$ à $\frac{1}{2}$ lorsque T croît de 0 à $+\infty$. La valeur de T_R est : $k_B T_R = \frac{\varepsilon}{\ln 2}$, ce qui correspond à $\Delta_R = -1$. En ce point, les deux expressions de $(-f)$ se raccordent, ainsi que toutes leurs dérivées : la transition est donc d'ordre infini. L'énergie libre présente en ce point une partie singulière due à l'accumulation des singularités de $\text{th}\, n\lambda$, pour des λ imaginaires purs tendant vers zéro. On peut montrer ([37] page 117) que cette partie singulière se comporte comme :

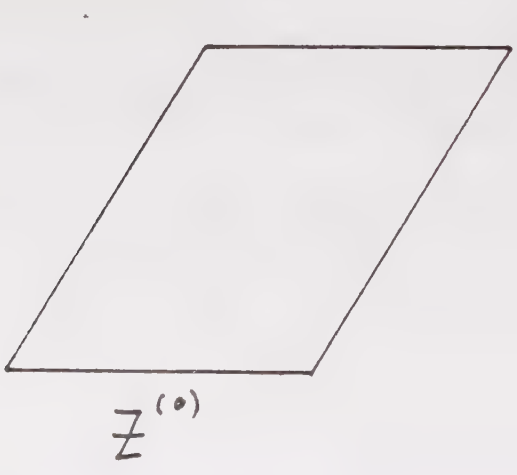
$$f_{sing} \sim \exp - \frac{\pi^2}{\lambda} \sim \exp - cst\,(T_R - T)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(II.86)}$$

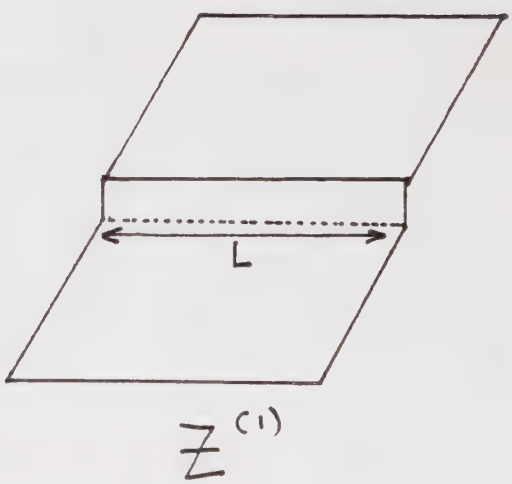
pour $\text{Re}\,\lambda > 0$. Cette partie singulière est identique aux prévisions du groupe de renormalisation (II.36) obtenues par Kosterlitz et Thouless.

Une autre quantité étudiée dans ce modèle est l'énergie libre de marche (step free-energy : f_{st}) définie comme étant le coût en énergie libre par unité de longueur d'une seule marche de hauteur unité :

$$\exp - L f_{st} = \frac{Z^{(1)}}{Z^{(0)}} \qquad \text{(II.87)}$$

où $Z^{(1)}$ et $Z^{(0)}$ sont les deux fonctions de partition du système avec les conditions aux limites suivantes :





Van Beijeren a obtenu une expression pour l'énergie de marche, reliée à l'énergie libre par la formule habituelle :

$$E_{st} = \frac{\partial f_{st}}{\partial \beta} \tag{II.88}$$

car f_{st} est le produit de β par l'énergie libre de Helmholtz :

$$-f_{st} = -\beta F_{st} = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \ln \frac{Z^{(1)}}{Z^{(0)}} \tag{II.89}$$

Ses résultats sont les suivants, pour des marches orientées à 0° ou 45° par rapport aux axes cristallins :

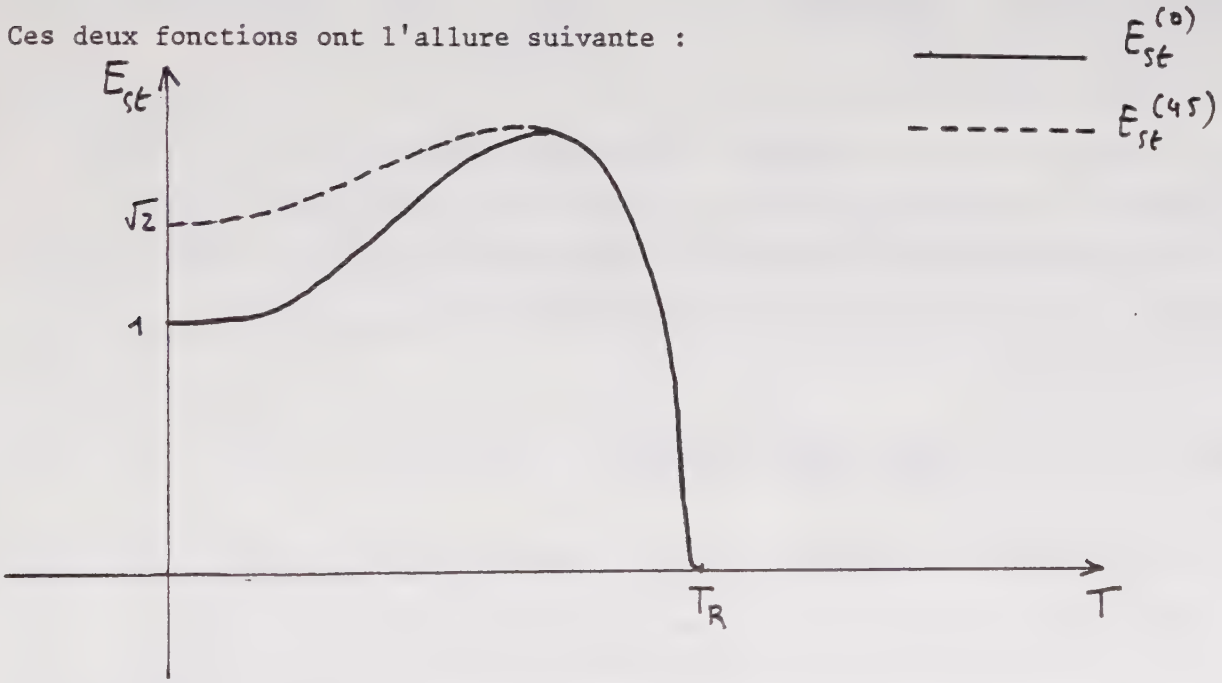
$$E_{st}^{(0)} = \frac{2}{\mathrm{th}\frac{\lambda}{2}} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n \geqslant 1} (-)^n \left\{ \frac{1}{2} + \left(n-\tfrac{3}{4}\right) \mathrm{th}\left(n-\tfrac{3}{4}\right)\lambda - \left(n-\tfrac{1}{4}\right) \mathrm{th}\left(n-\tfrac{1}{4}\right)\lambda \right\} \right] \tag{II.90}$$

$$E_{st}^{(45)} = \frac{2\sqrt{2}}{\mathrm{th}\frac{\lambda}{2}} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n \geqslant 1} (-)^n \left\{ 1 + (n-1)\,\mathrm{th}\,(n-1)\lambda - n\,\mathrm{th}\,n\lambda \right\} \right]$$

(pour $T \leqslant T_R$)

et $E_{st} \equiv 0$ pour $T \geqslant T_R$.

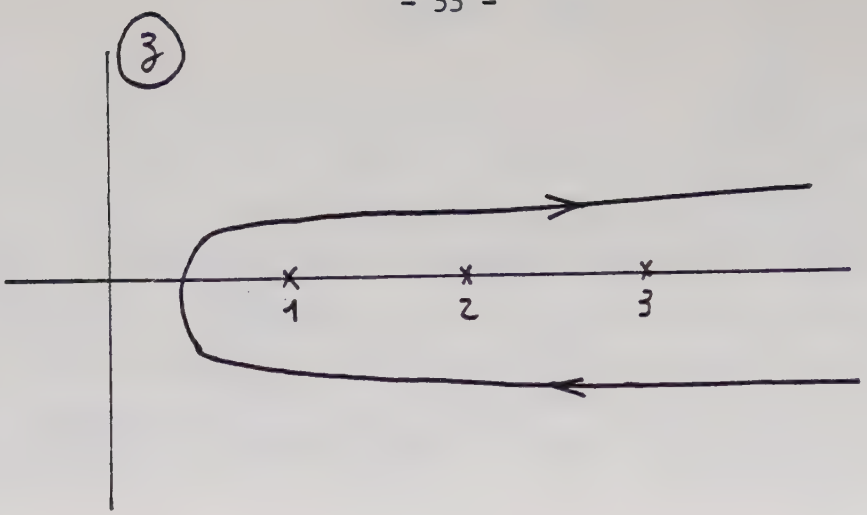
Ces deux fonctions ont l'allure suivante :



On peut montrer qu'elles s'annulent à $T=T_R$ avec la même singularité essentielle, en utilisant la formule sommatoire suivante :

$$\sum_{n \geqslant 1} (-)^n f(n) = \frac{i}{2} \int_C \frac{f(z)\,dz}{\sin \pi z} \tag{II.91}$$

où le contour C a la forme ci-dessous :



Dans le cas de $E_{st}^{(0)}$ et $E_{st}^{(45)}$, cette intégrale de contour ne reçoit de contribution que des singularités imaginaires pures. Pour $\lambda \to 0$, elle est dominée par les deux zéros $\pm i\frac{\pi}{2}$ de la fonction th, ce qui donne :

$$E_{st}^{(0)} \sim E_{st}^{(45)} \sim \frac{16\sqrt{2}\,\pi^2}{\lambda^3} \exp - \frac{\pi^2}{2\lambda} \qquad \text{(II.92)}$$

Nous reviendrons, aux chapitres III et IV, sur l'analyse numérique de ce type de singularités.

D'un point de vue plus physique, l'annulation de l'énergie de marche est une signature du mécanisme de transition rugueuse : dans la phase rugueuse, la surface peut développer librement de nombreuses marches qui s'entrecroisent, ce qui crée des fluctuations d'altitude à longue portée.

5) THEORIE EFFECTIVE DANS LA PHASE RUGUEUSE

5.a) L'approximation gaussienne

Dans la phase rugueuse ($T \rangle T_R$ dans le cas d'un modèle S.O.S. ; $T_c \rangle T \rangle T_R$ dans le cas du modèle d'Ising tridimensionnel ; $g_C^2 < g^2 < g_R^2$ dans le cas d'un modèle de jauge), les interfaces (ou les surfaces s'appuyant sur les boucles de Wilson) développent le même type de fluctuations que des membranes continues, comme si l'influence de la maille du réseau ne se faisait plus sentir dans la (ou les) dimension(s) transverse(s) à la surface de référence. On peut donc prendre comme théorie effective une théorie de surfaces S.O.S. continues définies par leurs altitudes par rapport à un plan de base, altitudes qui sont maintenant des nombres réels. Le plus simple de ces modèles

est le modèle gaussien, défini par l'action suivante :

$$S = \beta \sum_{\langle i,j \rangle} (h_i - h_j)^2 \qquad \text{(II.93)}$$

qui ne diffère de (II.3) que par le fait que les altitudes h_i au-dessus des sites $\vec{r}_i$ varient maintenant continûment. Le grand avantage de ce modèle est que de nombreuses quantités se calculent exactement. Nous utiliserons en particulier ce modèle au chapitre IV pour étudier les propriétés des systèmes de taille finie. Nous allons donner ici un exemple des propriétés de ce modèle, le calcul de :

$$G(\vec{r}) = \langle (h(\vec{0}) - h(\vec{r}))^2 \rangle \qquad \text{(II.94)}$$

Introduisons la transformée de Fourier de l'altitude :

$$h(\vec{r}) = \int \tilde{dp}\, e^{i\vec{p}\vec{r}}\, h_{\vec{p}} \qquad \text{(II.95)}$$

où l'intégrale est $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dp_1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dp_2}{2\pi}$, c'est-à-dire la mesure normée sur la première zone de Brillouin (on a pris la maille du réseau comme unité de longueur). L'action S prend alors la forme simple :

$$S = 2\beta \int \tilde{dp}\, h_{\vec{p}}\, h_{-\vec{p}}\, (2 - \cos p_1 - \cos p_2) \qquad \text{(II.96)}$$

On en déduit le "propagateur" par inversion de cette forme quadratique :

$$\Pi(\vec{p}) = \langle h_{\vec{p}}\, h_{-\vec{p}} \rangle = \frac{1}{4\beta\,(2 - \cos p_1 - \cos p_2)} \qquad \text{(II.97)}$$

Ainsi que la fonction de corrélation :

$$G(\vec{r}) = \int \tilde{dp}\, \frac{1 - \cos \vec{p}\vec{r}}{2\beta\,(2 - \cos p_1 - \cos p_2)} \qquad \text{(II.98)}$$

Comme nous l'avons vu en (II.43), cette fonction est bien représentée, dès que $|\vec{r}|$ est plus grand que a=1, par :

$$G(\vec{r}) \sim \frac{1}{2\pi\beta} \ln |\vec{r}| \qquad \text{(II.99)}$$

Ceci coïncide avec nos prévisions (II.82-83) concernant la phase rugueuse :

le modèle (II.93) décrit donc qualitativement cette phase.

5.b) Coefficient universel du potentiel entre quarks

Nous avons donné la relation entre la boucle de Wilson et le potentiel d'interaction entre "quarks" classiques en (I.21). L'analogue dans le modèle gaussien de la boucle de Wilson est la fonction de partition du modèle avec des conditions aux limites rigides : $h \equiv 0$ sur les côtés d'un rectangle de dimensions R et T. Ce rectangle contient les $(R-1)(T-1)$ points du réseau de coordonnées entières (p,q), $1 \leq p \leq R-1$; $1 \leq q \leq T-1$; et les conditions aux limites sont $h \equiv 0$ pour $p = 0$, $p = R$, $q = 0$, $q = T$. La fonction de partition cherchée est :

$$Z = \int Dh \exp -\beta \sum_{\langle i,j \rangle}^{(o)} (h_i - h_j)^2 \qquad \text{(II.100)}$$

où l'indice (o) rappelle que l'on tient compte de l'interaction avec les bords. On calcule cette expression au moyen de la formule (II.41), ce qui donne :

$$Z = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{\frac{(R-1)(T-1)}{2}} D^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(II.101)}$$

où D est le déterminant du laplacien discret avec les conditions aux limites prescrites. Le calcul de D se ramène au calcul des valeurs propres des 2 matrices du laplacien unidimensionnel, de tailles R et T, de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.102)}$$

Si la matrice A est de taille N, ses valeurs propres sont :

$$\lambda_p = 2\left(1 + \cos \frac{p}{N+1}\pi\right) \qquad 1 \leq p \leq N \qquad \text{(II.103)}$$

Remarque : Le "mode zéro" qui serait présent dans le système infini, correspondant à une translation globale des altitudes, ne figure pas dans (II.103). Pour $N \to \infty$, la dernière valeur propre λ_N se comporte comme $\frac{\pi^2}{N^2}$.
On obtient finalement :

$$\ln D = \sum_{\substack{1 \le p \le R-1 \\ 1 \le q \le T-1}} \ln \left(4 + 2\cos \frac{p}{R}\pi + 2\cos \frac{q}{T}\pi \right) \qquad \text{(II.104)}$$

Le potentiel d'interactions entre quarks est donné par :

$$-V(R) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln Z = \frac{R-1}{2} \ln \frac{\pi}{\beta} - \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln D \qquad \text{(II.105)}$$

La limite figurant dans le membre de droite donne une intégrale dont le calcul est explicite, et conduit à :

$$-V(R) = \frac{R-1}{2} \ln \frac{\pi}{\beta} - \frac{1}{2} \sum_{1 \le p \le R-1} \ln \left[4 - 2c_p + \left(12 - 16 c_p + 4 c_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \right] \qquad \text{(II.106)}$$

où $c_p = \cos \frac{p}{R}\pi$.

Le développement de cette somme pour R grand est obtenu par la formule d'Euler-Mac-Laurin :

$$\sum_{1 \le p \le R-1} f(p) = \int_0^R f(p)\,dp - \frac{1}{2}\left[f(0) + f(R)\right] + \cdots + (-)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!}\left[f^{(2n-1)}(R) - f^{(2n-1)}(0)\right] + \cdots \qquad \text{(II.107)}$$

où les B_n sont les nombres de Bernouilli :

$$B_1 = \frac{1}{6} \; ; \; B_2 = \frac{1}{30} \; ; \; B_3 = \frac{1}{42} \; \cdots$$

Dans notre cas, on a :

$$f(0) = \ln 2 \; ; \; f(\pi) = \ln\left[2(3+2\sqrt{2})\right]$$
$$f'(0) = 1 \; ; \; f'(\pi) = 0$$

ce qui conduit à :

$$V(R) = kR + V_0 + \frac{\alpha}{R} + O\left(\frac{1}{R^3}\right) \qquad \text{(II.108)}$$

où la tension de corde est donnée par :

$$k(\beta) = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta \ln \left(4 - 2\cos\theta + \left[12 - 16\cos\theta + 4\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{(II.109)}$$

et où α est un coefficient purement numérique :

$$\alpha = -\frac{\pi}{24} \qquad \text{(II.110)}$$

Un résultat semblable a été obtenu par Lüscher[39], qui l'étend à une dimension d quelconque : dans ce cas, les (d-2) dimensions transverses n'interagissent pas à l'approximation gaussienne, ce qui donne une factorisation des fonctions de partition, et en particulier :

$$\alpha = -\frac{\pi}{24}(d-2) \qquad \text{(II.111)}$$

On peut conjecturer que cet α est universel dans la phase rugueuse, car il est sans dimension au sens du comptage de puissances (sa dimension est $\frac{1}{h_c}$ comme α_{QED} et α_{QCD} à 4 dimensions).

*

* *

CHAPITRE III

ANALYSE DE DEVELOPPEMENTS DE COUPLAGE FORT

1) LES DEVELOPPEMENTS EN SERIE EN MECANIQUE STATISTIQUE

1.a) Cas des modèles de spins

Les développements en série de haute ou de basse température constituent un outil puissant pour explorer les propriétés des modèles de spins sur les réseaux. Leur analyse permet en particulier de déterminer les indices critiques avec une précision, d'autant meilleure que la série est plus longue, qui atteint actuellement quelques pour mille. Tout un volume de la série Domb et Green[40] leur est consacré.

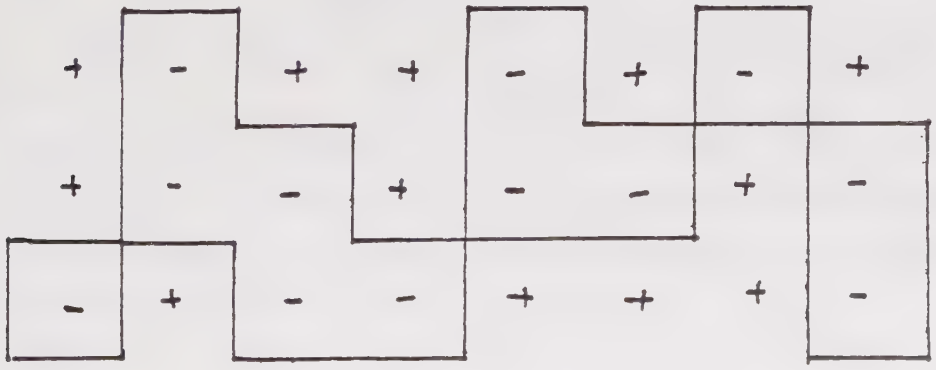
Sur l'exemple du modèle d'Ising à 2 dimensions, nous allons illustrer le principe de ces développements.

Basse température :

A température nulle, le modèle d'Ising se fige dans l'un des deux fondamentaux dégénérés (états totalement ordonnés). Les premiers états excités s'obtiennent en retournant un nombre fini de spins. Leur énergie E est donnée par :

$$E = E_0 + 2\beta P \qquad \text{(III.1)}$$

où $E_0 = -2N\beta$ est l'énergie du fondamental, et P est le périmètre du contour de Peierls (courbe fermée, connexe ou non, tracée sur le réseau dual, et limitant les zones de spins + et de spins -). Par exemple :



$P = 34.$

On obtient donc, pour la fonction de partition Z :

$$Z = e^{-\beta E_0} \sum_P e^{-2\beta P} w(P) \qquad \text{(III.2)}$$

où la somme porte sur tous les périmètres ℓ possibles, et où $w(\ell)$ est la dégénérescence des contours de périmètre ℓ .
Les premiers termes, correspondant à une plaquette et une double plaquette, sont :

$$Z e^{\beta E_0} = 1 + N(t^2 + 2t^3) + \cdots \qquad \text{(III.3)}$$

où la variable du développement est : $t = e^{-2\beta}$
On en déduit le développement de l'énergie libre :

$$-f = -\beta E_0 + t^2 + 2t^3 + \cdots \qquad \text{(III.4)}$$

D'autres quantités thermodynamiques (susceptibilité, chaleur spécifique, longueur de corrélation) peuvent être développées selon le même principe.

Haute température :

A température infinie, nous rencontrons une situation opposée à la précédente : toutes les configurations ont le même poids statistique. On peut cependant développer les quantités thermodynamiques en série de β . Prenons encore l'exemple du modèle d'Ising en champ magnétique nul : en remarquant que l'on a :

$$\exp(\alpha\sigma) = \operatorname{ch}\alpha\,(1 + \sigma \operatorname{th}\alpha) \qquad \text{(III.5)}$$

(ceci est une conséquence de $\sigma^2 = 1$)
On écrit alors :

$$Z = (\operatorname{ch}\beta)^{2N} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + t\sigma_i \sigma_j) \qquad \text{(III.6)}$$

où la variable du développement est $t = \operatorname{th}\beta$.
Un terme du développement en puissances de t a la forme :

$$t^X \sum_{\{\sigma\}} \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \cdots \sigma_{i_X}$$

La somme sur toutes les valeurs de σ donne une contribution non-nulle si et seulement si chaque site apparaît un nombre pair de fois. On peut alors représenter ce terme par un diagramme où chaque produit $\sigma_i \sigma_j$ est représenté

par un lien. Dans notre cas particulier, les diagrammes sont à nouveau les contours de Peierls, et on obtient :

$$Z = (ch\beta)^{2N} 2^N \sum_{\ell} t^{\ell} w(\ell) \qquad \text{(III.7)}$$

Le rapprochement avec (III.2) donne une autre démonstration de l'auto-dualité (II.19-21) du modèle d'Ising bidimensionnel.

De nombreuses méthodes permettent d'engendrer sur ordinateur les graphes du développement de différentes quantités jusqu'à des ordres élevés (20 ou 30 actuellement).

1.b) Cas des modèles de jauge

Les mêmes techniques de développement s'appliquent à un modèle de jauge quelconque. Prenons encore l'exemple du groupe $\mathbb{Z}_2$, en dimension quelconque. Rappelons qu'un développement autour de $\beta = 0$ est un développement de couplage fort.

La fonction de partition d'un système de N sites s'écrit :

$$Z = \sum_{\{U\}} \exp -\beta \sum_{P} U_P \qquad \text{(III.8)}$$

où est le produit des 4 variables de liens entourant la plaquette P. Les U_P vérifient l'égalité (III.5) : on a donc intérêt à prendre $t = th\beta$ comme paramètre de développement :

$$Z = (ch\beta)^{\frac{Nd(d-1)}{2}} \sum_{\{U\}} \prod_{P} (1 + t\, U_{ij} U_{jk} U_{kl} U_{li}) \qquad \text{(III.9)}$$

Par analogie avec le modèle d'Ising, chaque terme du développement correspond à un diagramme construit avec les règles suivantes : un diagramme est un ensemble de plaquettes, connexe ou non, tel que chaque lien appartienne à un nombre pair de plaquettes ; sa contribution est t^{ν}, où ν est le nombre de plaquettes.

Le diagramme à l'ordre le plus base est le cube (t^6), ce qui donne :

$$Z = (ch\beta)^{\frac{Nd(d-1)}{2}} 2^{Nd} \left[1 + \frac{Nd(d-1)(d-2)}{6} t^6 + \dots\right] \qquad \text{(III.10)}$$

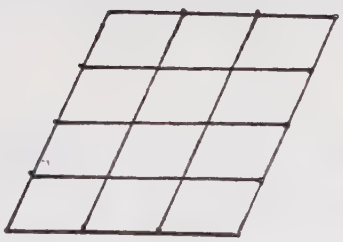
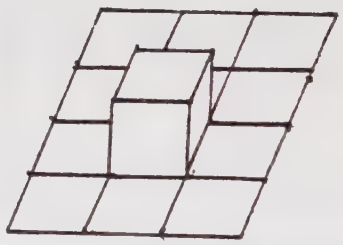
On en déduit l'énergie libre du modèle :

$$-f = \frac{d(d-1)}{2} \ln \operatorname{ch}\beta + d \ln 2 + \frac{d(d-1)(d-2)}{6} t^6 + \cdots \qquad \text{(III.11)}$$

Une autre quantité intéressante dans la phase de couplage fort est la tension de corde, définie par (I.22), et caractéristique du confinement. Nous allons calculer les premiers termes du développement d'une boucle de Wilson plate d'aire A :

$$\langle W \rangle = Z^{-1} \sum_{\{U\}} \prod_{l \in C} U_l \prod_{P} (1 + t\,UUUU) \qquad \text{(III.12)}$$

Les diagrammes contribuant à cette quantité seront des ensembles de plaquettes s'appuyant sur la courbe C , tels que chaque lien de C appartienne à un nombre impair de plaquettes, et chaque lien n'appartenant pas à C, à un nombre pair de plaquettes. Le diagramme d'ordre le plus bas est simplement le pavage de la boucle de Wilson (t^A) ; le suivant est obtenu par adjonction d'un cube à ce pavage (t^{A+4}) ; ...

$\langle W \rangle . Z =$  $+$  $+ \cdots$

t^A $\qquad$ $2(d-2)\, t^{A+4}\, A .$

On obtient :

$$\langle W \rangle = z^{-1} t^{A} [1 + z(d-2) A t^{4} + \dots] \qquad \text{(III.13)}$$

On reconnaît le développement de la loi d'aire (I.22), avec une tension de corde donnée par :

$$-k = \ln t + z(d-2) t^{4} + \cdots \qquad \text{(III.14)}$$

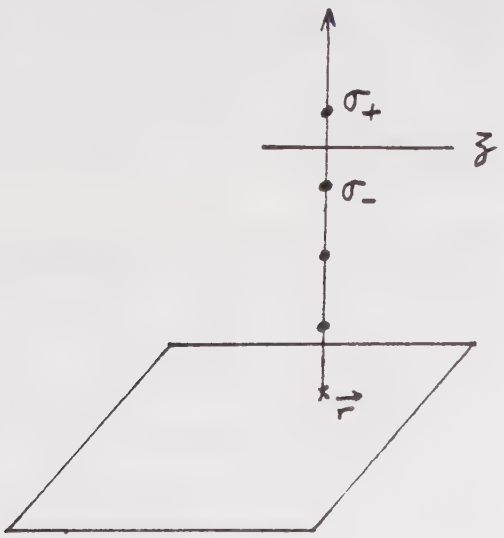
Notons enfin que c'est grâce au développement (III.5) que le groupe $\mathbb{Z}_2$ donne des séries simples. Pour un groupe quelconque, les développements de couplage fort se font selon les puissances de β , et impliquent des graphes où certaines plaquettes interviennent plusieurs fois. Cette méthode générale fut développée par R. Balian, J.M. Drouffe et C. Itzykson[41].

2) L'OPERATEUR DE LOCALISATION

2.a) Généralisation du cas tridimensionnel

Au paragraphe (II.1.b), nous avons introduit les observables $p(z, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ et $q(z, \vec{r})$ pour décrire l'état localisé ou délocalisé d'une surface S.O.S.

Traduisons d'abord la seconde quantité dans le langage de la version S.O.S. du modèle d'Ising tridimensionnel. Notons σ_+ et σ_- les spins situés aux altitudes $(z + \frac{1}{2})$ et $(z - \frac{1}{2})$ au-dessus du point r :



Alors le produit ($\sigma_+ \sigma_-$) vaut (-1) (respectivement (+1)) si la surface séparant les deux phases passe (respectivement : ne passe pas) par le point d'altitude z au-dessus du site r . Ceci s'écrit simplement :

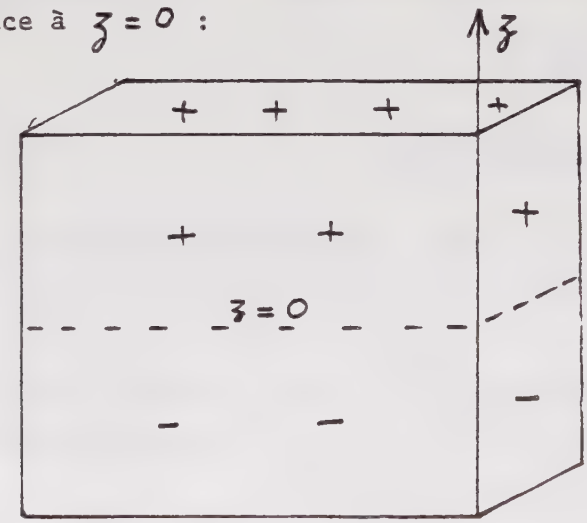
$$\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{SOS} = 1 - 2\, q\,(z, \vec{r}) \qquad \text{(III.15)}$$

Dans le cas du modèle d'Ising isotrope, il s'agit de comparer les valeurs de $\langle \sigma_+ \sigma_- \rangle$ en présence de conditions aux limites favorisant ou non une interface. Definissons :

$$\tau_0 = \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{Per.} \qquad \text{(III.16)}$$

et $$\tau_W = \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle_{Int.}$$

où l'indice $Per.$ signifie que les conditions aux limites périodiques sont utilisées, et l'indice $Int.$ signifie que l'on a pris les conditions favorisant un interface à $z = 0$:



Remarquons que τ_0 n'est autre que l'opposé de l'énergie interne du système :

$$\tau_0 = -u = -\frac{\partial f}{\partial \beta} \qquad \text{(III.17)}$$

et que cette quantité a la valeur triviale (+1) dans le modèle S.O.S. L'observable caractéristique de la transition rugueuse est alors :

$$I = \frac{2}{\tau_0 - \tau_W} \qquad \text{(III.18)}$$

qui généralise $q(0)^{-1}$ du modèle S.O.S. en vertu de (III.15). Cette quantité, définie uniquement dans la phase lisse, doit diverger lorsque T tend vers T_R avec une loi de puissance :

$$I \sim (T_R - T)^{-\theta} \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{1}{4} \tag{III.19}$$

(cette valeur de l'indice critique θ est donnée par (II.81)).

Traduisons enfin cette quantité dans le modèle dual qui est, nous l'avons vu au paragraphe (II.2.a), la théorie de jauge $\mathbb{Z}_2$. La quantité ρ_0, qui est la fonction de corrélation entre voisins, devient la fonction de frustration d'une plaquette :

$$\rho_0 = \langle e^{-2\beta U_P} \rangle = \frac{Z^*}{Z} \tag{III.20}$$

où Z^* est la fonction de partition obtenue en changeant le signe du couplage de la plaquette P, duale du lien initial qui joignait τ_+ à τ_-. Quant à ρ_W, il devient la fonction de frustration d'une plaquette en présence d'une grande boucle de Wilson :

$$\rho_W = \frac{\langle W e^{-2\beta U_P} \rangle}{\langle W \rangle} = \frac{\langle W \rangle^*}{\langle W \rangle} \tag{III.21}$$

où l'étoile signifie encore que l'on a changé le signe du couplage de la plaquette P, située dans le plan de la boucle de Wilson.

La quantité I peut se définir pour la théorie de jauge $\mathbb{Z}_2$ en dimension arbitraire. Pour $d > 3$, on perd évidemment l'interprétation en termes de variables de spins. Mais I reste un bon indicateur de la transition rugueuse des théories de jauge qui, nous allons le voir, existe encore pour $d \gg 4$, contrairement à ce qui se passe pour un (d-1)-interface en dimension $d \gg 4$.

Une généralisation à un groupe quelconque a été proposée par J.M. Drouffe et J.B. Zuber[42] : ils étendent les formules (III.18-21) à tout groupe G, en définissant pour chaque élément C du centre de G :

$$\begin{aligned} \rho_0(C) &= \langle e^{\beta\chi(CU_P) - \beta\chi(U_P)} \rangle \\ \rho_W(C) &= \langle W \cdot e^{\beta\chi(CU_P) - \beta\chi(U_P)} \rangle / \langle W \rangle \\ I(C) &= \frac{Z}{\rho_0(C) - \rho_W(C)} \end{aligned} \tag{III.22}$$

Ils introduisent également les quantités correspondantes définies en supprimant une plaquette dans l'action, au lieu de la faire "tourner" de C :

$$\left| \begin{array}{l} q_{(0)} = \langle e^{-\beta \chi(U_p)} \rangle \\ q_{(w)} = \langle w . e^{-\beta \chi(U_p)} \rangle / \langle w \rangle \\ I(0) = \dfrac{1}{q(0) - q(w)} \end{array} \right. \qquad \text{(III.23)}$$

2.b) Extrapolation des séries de couplage fort

Dans les mêmes articles [42], les auteurs donnent le résultat du développement de couplage fort (dont le principe est exposé au paragraphe 1.b), pour les quantités I ou I(0), en dimension quelconque d, et pour différents groupes discrets ou continus : $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$, U(1), SU(2), SU(3).

Une analyse des rapports entre termes successifs les a conduits au résultat suivant : tous les groupes étudiés présentent une singularité de rugosité pour $d \geqslant 3$; et la position de cette singularité est indépendante du groupe, si le développement est effectué en fonction du paramètre de couplage suivant :

$$t = \langle \chi_F \rangle = \frac{\int dU \, \chi_F(U) \exp \beta [\chi_F(U) + h.c.]}{\int dU \exp \beta [\chi_F(U) + h.c.]} \qquad \text{(III.24)}$$

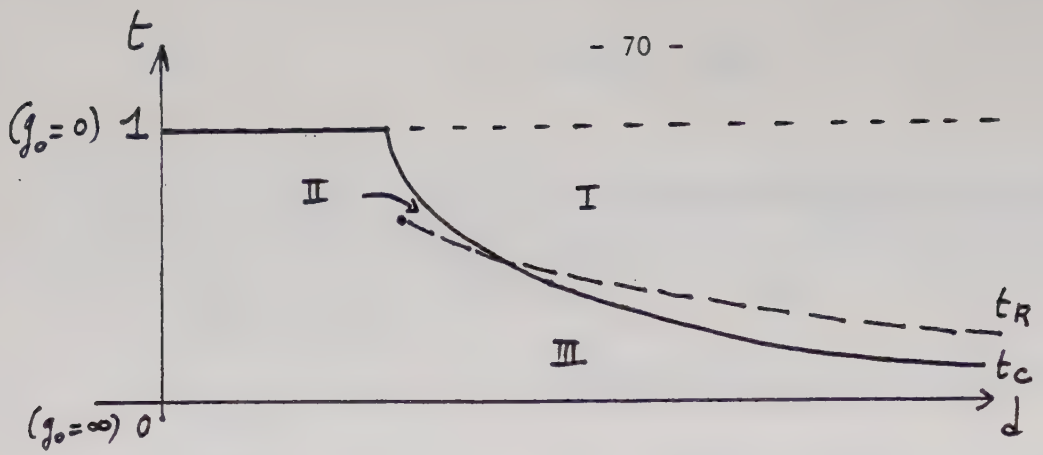
où χ_F est le caractère de la représentation fondamentale, et où l'intégrale est étendue à tout le groupe. Cette variable t est une généralisation naturelle de $t = th\,\beta$ (qui rend le développement simple dans le cas de $\mathbf{Z}_2$, en vertu de (III.5)).

Cette valeur universelle de t_R, qui ne dépend que de la dimension, est donnée dans le tableau ci-dessous :

d	t_R
3	0,46 - 0,47
4	0,40 - 0,41
5	0,36 - 0,37

Il est intéressant de comparer cette valeur de t_R avec la valeur t_c correspondant à la transition de déconfinement (lorsque celle-ci a lieu pour une valeur finie du couplage). La situation semble dépendre du groupe de jauge, et n'est pas encore définitivement tranchée. En dimension basse (d=3), la transition rugueuse est toujours dans la phase confinante ($t_R < t_c$). En dimension élevée ($d \geqslant 5$), il semble qu'elle ait lieu dans la phase déconfinante ($t_R > t_c$), phase où les surfaces de Wilson sont "métastables", car la boucle de Wilson décroît selon une loi de périmètre. La dimension 4 est un cas marginal où il est difficile de distinguer t_R de t_c : $t_R > t_c$ pour le groupe $\mathbf{Z}_3$; $t_R < t_c$ pour U(1) ; $t_R \approx t_c$ pour SU(2) et $\mathbf{Z}_2$.

L'allure générale des fonctions $t_R(d)$ et $t_c(d)$ est donc la suivante (sans qu'il soit possible de préciser l'échelle sur l'axe des dimensions, qui dépend sensiblement du groupe étudié) :



I : phase non-confinante

II : phase confinante rugueuse

III : phase confinante lisse

Nous nous proposons de déterminer la nature de la singularité de I à $t = t_R$. Rappelons que nos estimations théoriques conduisent à un indice critique θ égal à $\frac{1}{4}$ (III.19). Nous avons utilisé la méthode d'extrapolation la plus connue dans l'étude des phénomènes critiques :

Méthode D-log-Padé :

Si la quantité étudiée I a comme plus proche singularité un point de branchement algébrique :

$$I \sim (t_R - t)^{-\theta}$$

alors sa dérivée logarithmique (dont on connaît le développement autour de t=0 à partir de celui de I) aura un pôle simple au même endroit :

$$\frac{I'}{I} \sim -\frac{\theta}{t - t_R} \qquad \text{(III.25)}$$

dont le résidu est précisément l'indice critique θ .

La méthode habituelle pour évaluer θ consiste à extrapoler le développement en série :

$$I = \sum_{n=0}^{M} I_n t^n \qquad \text{(III.26)}$$

par une fraction rationnelle :

$$F(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \qquad \text{(III.27)}$$

dont le développement autour de t=0 est précisément (III.26), ce qui permet de déterminer P et Q par identification des coefficients des deux développements. Si l'on impose les degrés des polynômes : $d^oP = N$; $d^oQ = D$, alors la solution est (en général) unique si : $N+D = M$. F est alors appelé : approximant de Padé [N/D] de la fonction I. On peut évidemment tronquer la série, et former des approximants de Padé avec $N+D = M_1 < M$. Cette méthode a été beaucoup utilisée pour déterminer les indices critiques des modèles de spins (voir [40]; en particulier le chapitre 4). Elle est d'autant plus fiable que l'indice critique θ varie peu avec l'ordre [N/D] de l'approximant.

Nous avons analysé par cette méthode les séries suivantes, pour d=3,4 et 5 :

groupe Z_2 :
$$I = 1 + 2(d-2)\left[t^4 + 5t^6 + (10d-11)t^8 + (88d-168)t^{10} + (140d^2 - 312d + 106)t^{12} + \left(\frac{5048}{3}d^2 - \frac{20216}{3}d + 7213\right)t^{14}\right]$$

groupe Z_3 :
$$I(o) = 1 + 2(d-2)\left[t^4 + 6t^6 + (10d-7)t^8 + \left(9d - \frac{63}{2}\right)t^9 + (92d-148)t^{10} + (70d-195)t^{11} + (140d^2 - 210d - 101)t^{12}\right]$$

groupe U(1) :
$$I(o) = 1 + 2(d-2)\left[t^4 + 6t^6 + (10d-11)t^8 + \left(96d - \frac{371}{2}\right)t^{10} + \left(140d^2 - \frac{977}{3}d + \frac{13403}{96}\right)t^{12} + \left(1734d^2 - \frac{112515}{16}d + \frac{1105105}{144}\right)t^{14}\right]$$

groupe SU(2) :
$$I(o) = 1 + 2(d-2)\left[t^4 + 8t^6 + (10d-11)t^8 + \left(116d - \frac{698}{3}\right)t^{10} + \left(140d^2 - \frac{998}{3}d + \frac{11695}{81}\right)t^{12} + \left(\frac{5896}{3}d^2 - \frac{6657691}{810}d + \frac{7494289}{810}\right)t^{14}\right]$$

groupe SU(3) :
$$I(o) = 1 + 2(d-2)\left[t^4 + 22t^6 + (10d+1)t^8 +\right.$$

$$+\left(27d-\frac{189}{2}\right)t^9+\left(264d-\frac{1003}{2}\right)t^{10}+\left(666d-1725\right)t^{11}+$$

$$\left(140d^2+30d-\frac{1806183}{4096}\right)t^{12}\Big]$$

Pour les groupes Z_2, U(1) et SU(2), les développements ne faisant intervenir que des puissances paires, nous avons considéré I ou I(0) comme une fonction de $u=t^2$. Nous n'avons conservé que les approximants de Padé dont la première singularité est réelle positive : celle-ci est alors toujours en bon accord avec les valeurs de t_R données page 69. Les valeurs de θ correspondantes sont données dans les tableaux ci-dessous :

U(1)	d=3	d=4	d=5
[3|3]	0,2101	0,2133	0,1610
[4|3]	0,2163	0,1937	0,1761
[4|2]	0,2003	0,2018	0,1829

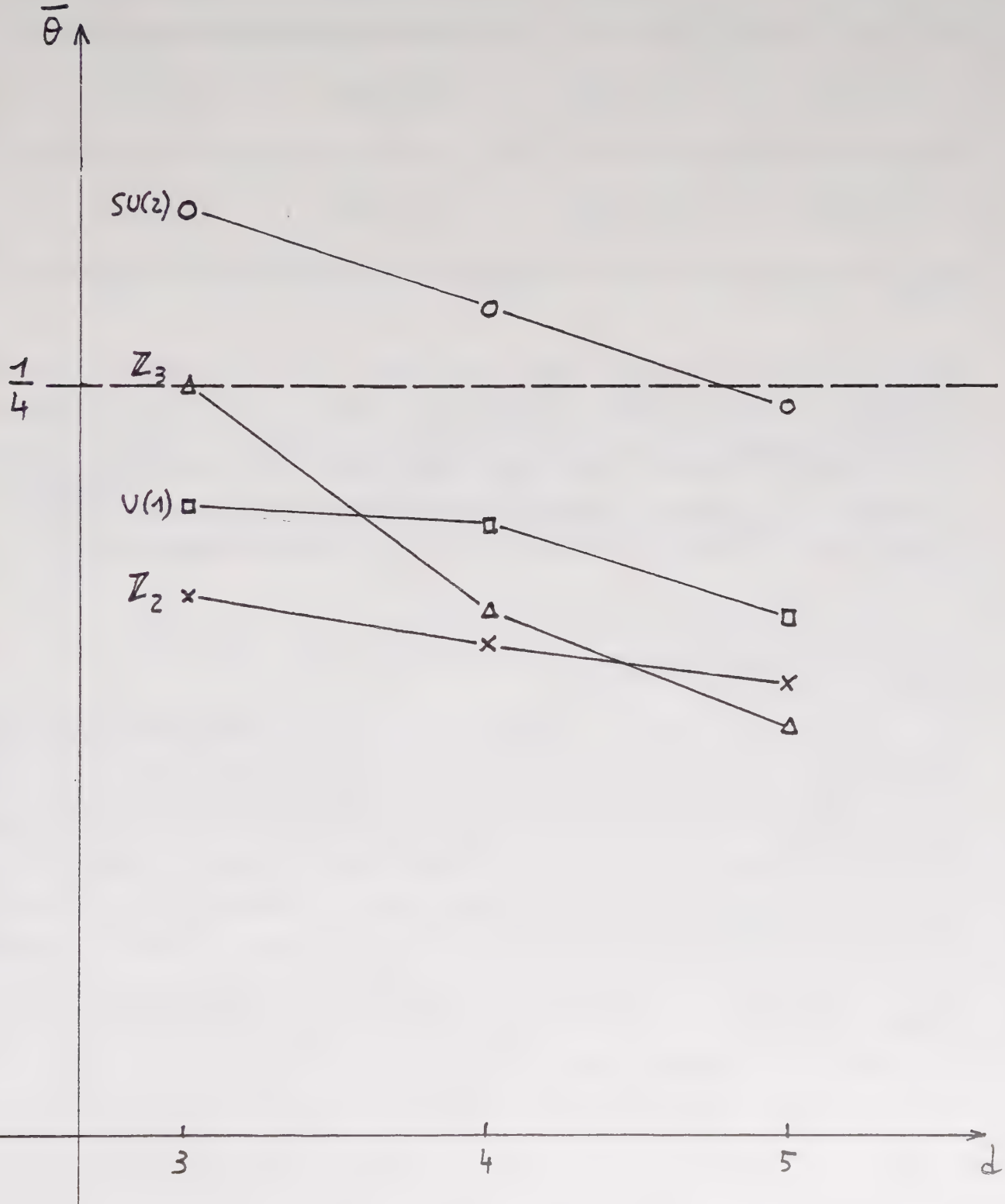
SU(2)	d=3	d=4	d=5
[3|3]	0,3212	0,2742	0,2418
[4|3]	0,3356	0,2815	0,2465
[4|2]	0,2686	0,2718	0,2400

$SU(3)$	$d=3$	$d=4$	$d=5$
$[6\|4]$	0,1974	0,0905	0,0695
$[7\|5]$	0,6108	0,4564	0,3791
$[8\|4]$	0,4389	0,3137	0,2416

$\mathbb{Z}_2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$
$[4\|3]$	0,1711	0,1503	0,1534
$[5\|2]$	0,2370	0,2116	0,1479
$[3\|3]$	0,1757	0,1476	0,1511
$[4\|2]$	0,1744	0,1698	0,1503
$[5\|1]$	0,1381	0,1370	0,1506

$\mathbb{Z}_3$	$d=3$	$d=4$	$d=5$
$[5\|3]$	0,2750	0,1347	0,1946
$[6\|4]$	0,2790	0,2331	0,1202
$[7\|4]$	0,2183	0,1693	0,1614
$[7\|5]$	0,2132	0,2148	0,1001
$[6\|2]$	0,2476	0,1275	0,0784
$[7\|3]$	0,2536	0,1634	0,0836
$[8\|4]$	0,2129	0,1632	0,1983
$[9\|2]$	0,3051	0,1965	0,1498

Les valeurs de ϑ données par ces approximants sont relativement stables, sauf pour SU(3) (la série correspondante présente des oscillations importantes : nous n'avons pu retenir que 3 approximants parmi 15, et les résidus sont encore instables). La moyenne $\overline{\vartheta}$ des résidus (pour un groupe et une dimension donnés), qui constitue notre meilleure estimation de ϑ (compte tenu des séries en notre possession), est donnée dans le tableau ci-dessous. Nous avons également représenté la variation de $\overline{\vartheta}$ en fonction de d.



$\overline{\theta}$	d=3	d=4	d=5
Z_2	0,179	0,163	0,151
Z_3	0,250	0,175	0,136
U(1)	0,209	0,203	0,173
SU(2)	0,308	0,276	0,243

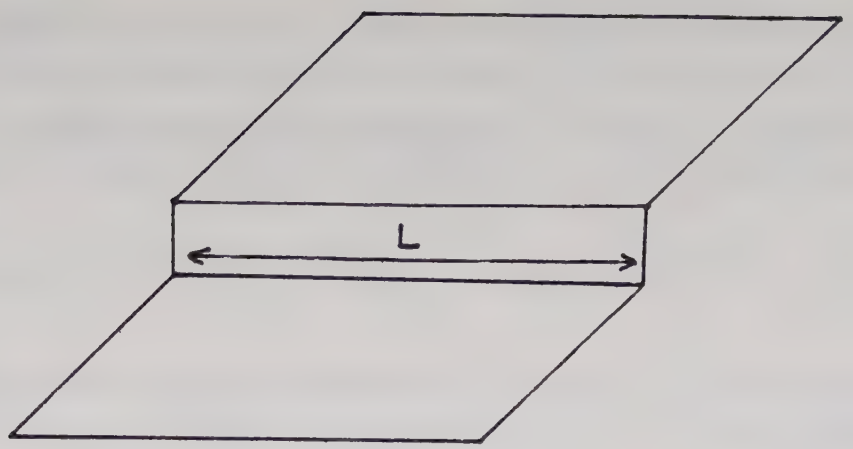
L'indice critique θ dépend donc relativement peu du groupe ou de la dimension, et se trouve en assez bon accord avec notre prévision ($\theta = \frac{1}{4}$) à d=3. Nous reviendrons au paragraphe 4 sur le cas des dimensions $d \geqslant 4$.

3) L'ENERGIE LIBRE DE MARCHE

Le calcul de l'énergie de marche par Van Beijeren (voir paragraphe II.4) nous suggéra d'étudier l'analogue de cette quantité pour la théorie de jauge Z_2. Ce travail [54] est le fruit d'une collaboration étroite avec J.M. Drouffe et J.B. Zuber.

3.a) Développement de couplage fort

L'énergie libre de marche f_{st} est définie de la façon suivante : la valeur moyenne d'une grande boucle de Wilson d'aire A sur laquelle on impose une marche de longueur L a la forme asymptotique :



$$\langle W \rangle = \exp\left(-k A - f_{st} L\right) \qquad \text{(III.28)}$$

où k est la tension de corde, comme dans le cas d'une boucle plate. Le développement de couplage fort (en série de $t = th\,\beta$) s'effectue selon le principe décrit en III.1.b. Nos résultats sont les suivants, pour le modèle Z_2 à 3 et 4 dimensions :

$$\left|\begin{array}{l} -f_{st}^{(3)} = \ln t + 2t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 - t^6 - \frac{12}{7}t^7 - 4t^8 + \cdots \\ -f_{st}^{(4)} = \ln t + 2t + \frac{2}{3}t^3 + 2t^4 + \frac{22}{5}t^5 + 3t^6 + \frac{128}{7}t^7 + 14t^8 + \cdots \end{array}\right. \qquad \text{(III.29)}$$

3.b) Analyse des séries

Nous nous proposons de déterminer la nature de la singularité de f_{st} à $t=t_R$. Bien que les séries soient courtes et irrégulières (en particulier à d=3, où les signes font penser à une singularité dominante complexe), la très grande instabilité de la méthode D-log-Padé *exclut* l'éventualité d'une singularité algébrique. Nous envisageons donc le cas d'une singularité essentielle du type :

$$\left|\begin{array}{l} -f_{st} \sim (t_R - t)^{\beta} \exp - C\,(t_R - t)^{-\alpha} \quad (\alpha > 0) \\ -E_{st} \sim (t_R - t)^{\beta - \alpha - 1} \exp - C\,(t_R - t)^{-\alpha} \end{array}\right. \qquad \text{(III.30)}$$

où E_{st} est l'énergie (interne) de marche, reliée à l'énergie libre par :

$$E_{st} = \frac{\partial f_{st}}{\partial \beta} = (1-t^2)\,\frac{\partial f_{st}}{\partial t} \qquad \text{(III.31)}$$

Rappelons que le résultat (II.92) de Van Beijeren est de cette forme, avec :

$$\alpha = \frac{1}{2} \; ; \quad \beta = 0 \qquad \text{(III.32)}$$

La présence du terme dominant $\ln t$ dans les développements de f_{st} nous suggéra de considérer la quantité $(1-e^{-f_{st}})$, dont les zéros sont ceux de f_{st}, et qui a l'avantage d'être analytique à t=0. L'hypothèse (III.30) nous a conduits à analyser par la méthode D-log-Padé les séries de $\varphi = -\ln(1-e^{-f_{st}})$:

$$\varphi^{(d=3)} = t + \frac{5}{2}t^2 + \frac{13}{3}t^3 + \frac{33}{4}t^4 + \frac{81}{5}t^5 + \frac{197}{6}t^6 + \frac{470}{7}t^7 + \frac{1113}{8}t^8 + \frac{2632}{9}t^9 + \ldots$$

$$\varphi^{(d=4)} = t + \frac{5}{2}t^2 + \frac{13}{3}t^3 + \frac{33}{4}t^4 + \frac{91}{5}t^5 + \frac{257}{6}t^6 + \frac{680}{7}t^7 + \frac{1865}{8}t^8 + \frac{4954}{9}t^9 + \ldots \qquad \text{(III.33)}$$

Remarquons d'abord que ces séries sont beaucoup plus régulières que les séries originales (III.29), et que les rapports des termes successifs donnent des valeurs de t_R en bon accord avec celles du paragraphe 2.b), quoique légèrement plus élevées :

$$t_R^{(d=3)} = 0,47 - 0,48$$

$$t_R^{(d=4)} = 0,41 - 0,42 \qquad \text{(III.34)}$$

Les résidus des approximants de Padé de la dérivée logarithmique de φ (qui sont des valeurs approchées de l'indice α) sont donnés dans le tableau suivant.

α	d=3	d=4
[2/3]	+.643	+.397
[3/3]	+.680	+.338
[3/4]	+.675	+.537
[4/4]	+.681	+.505

Nous avons également analysé les séries (III.33) par la *méthode de Padé-Mellin* : cette méthode fut appliquée pour la première fois par Baker et Hunter[43]

aux modèles de spins, et reprise par D. Bessis, P. Moussa et G. Turchetti[44]. Ce procédé est particulièrement adapté pour déterminer les indices critiques si plusieurs singularités "confluentes" ont lieu au même point $t=t_R$ (*). Il consiste d'abord en une transformation de Laplace sur la variable $x = \ln\left(1-\frac{t}{t_R}\right)$

$$\varphi(t) = \int_\alpha^\infty \left(1-\frac{t}{t_R}\right)^\lambda \sigma(\lambda)\, d\lambda \qquad \text{(III.35)}$$

La nature des singularités en $t=t_R$ est donnée par les propriétés de la mesure $\sigma(\lambda)$; le cas le plus simple est celui d'un spectre discret:

$$\sigma(\lambda) = \sum_n \sigma_n\ \delta(\lambda-\gamma_n) \qquad \text{(III.36)}$$

la fonction φ possède alors des singularités algébriques d'indices critiques γ_n :

$$\varphi(t) = \sum_n \sigma_n \left(\frac{t_R-t}{t_R}\right)^{\gamma_n} \qquad \text{(III.37)}$$

On introduit ensuite la transformée de Hilbert de la mesure :

$$S(t) = \int_\alpha^\infty \frac{\sigma(\lambda)\, d\lambda}{1-t\lambda} \qquad \text{(III.38)}$$

Cette fonction prend la forme suivante, dans le cas simple (III.36) :

$$S(t) = \sum_n \frac{\sigma_n}{1-t\gamma_n} \qquad \text{(III.39)}$$

Les pôles de S(t) sont donc les inverses des indices critiques γ_n . On peut construire le développement de Taylor de S(t) à partir de celui de $\varphi(t)$: si $S(t) = \sum S_k t^k$, et $\varphi(t) = \sum \varphi_k t^k$, alors on a la formule de recurrence :

$$S_k = (-)^k t_R^k\, k!\, \varphi_k - \sum_{0 \le j \le k-1} C_{kj}\, S_j$$

où les C_{kj} sont des entiers définis par les relations :

$$\begin{cases} C_{n+1,j} = C_{n,j-1} - n\, C_{n,j} & \text{pour } 1 \le j \le n \\ C_{n,n} = 1 \ ; \quad C_{n,0} = 0. \end{cases}$$

(*) Notons qu'il nécessite la connaissance (précise) de la valeur de t_R.

On analyse enfin la série obtenue par approximants de Padé : les inverses des pôles des approximants sont des valeurs approchées des indices critiques.

Nous avons appliqué cette méthode aux séries de φ , en "balayant" les intervalles $.45 \lesssim t_R^{(d=3)} \lesssim .47$ et $.37 \lesssim t_R^{(d=4)} \lesssim .41$. Les pôles les plus négatifs (singularité dominante) des différents approximants ont une dispersion minimale pour $t_R^{(d=3)} = .464$ et $t_R^{(d=4)} = .402$. Les valeurs correspondantes de α sont :

$$\left| \begin{array}{l} \alpha^{(d=3)} = 0,54 \pm 0,14 \\ \alpha^{(d=4)} = 0,47 \pm 0,06 \end{array} \right. \qquad \text{(III.40)}$$

(les incertitudes données ici sont égales aux écarts-types obtenus avec 5 approximants).

Cette même méthode, appliquée aux séries de $\ln E_{st}$ (III.31), a donné des résultats beaucoup moins stables.

Nous sommes donc arrivés, par deux méthodes d'analyse numérique différentes, à l'existence d'une singularité essentielle à la température de transition rugueuse :

$$- f_{st} \sim \exp - C (t_R - t)^{-\alpha}$$

avec une valeur de l'indice α qui est certainement dans l'intervalle : $+\frac{1}{3} \lesssim \alpha \lesssim +\frac{2}{3}$, pour d=3 et d=4.

4) CONCLUSIONS ET COMPORTEMENT A GRANDE DIMENSION

Dans ce chapitre, nous avons montré que la transition rugueuse, dont le mécanisme est bien compris à 3 dimensions grâce à l'approximation S.O.S., existe encore à des dimensions plus élevées ($d \gtrsim 4$), bien qu'elle disparaisse dans la phase non-confinée pour une dimension d=4 ou d=5, selon le groupe de jauge étudié.

La transition est d'ordre infini quelle que soit la (basse) dimension, et les indices critiques : θ (opérateur de localisation) et α (énergie de

marche), que nous avons déterminés par extrapolation de séries de couplage fort, sont, pour d=3 et d=4, en bon accord avec les valeurs prédites au chapitre II (transition de Kosterlitz-Thouless) :

$$\alpha = 2\theta = \frac{1}{2} \qquad \text{(III.41)}$$

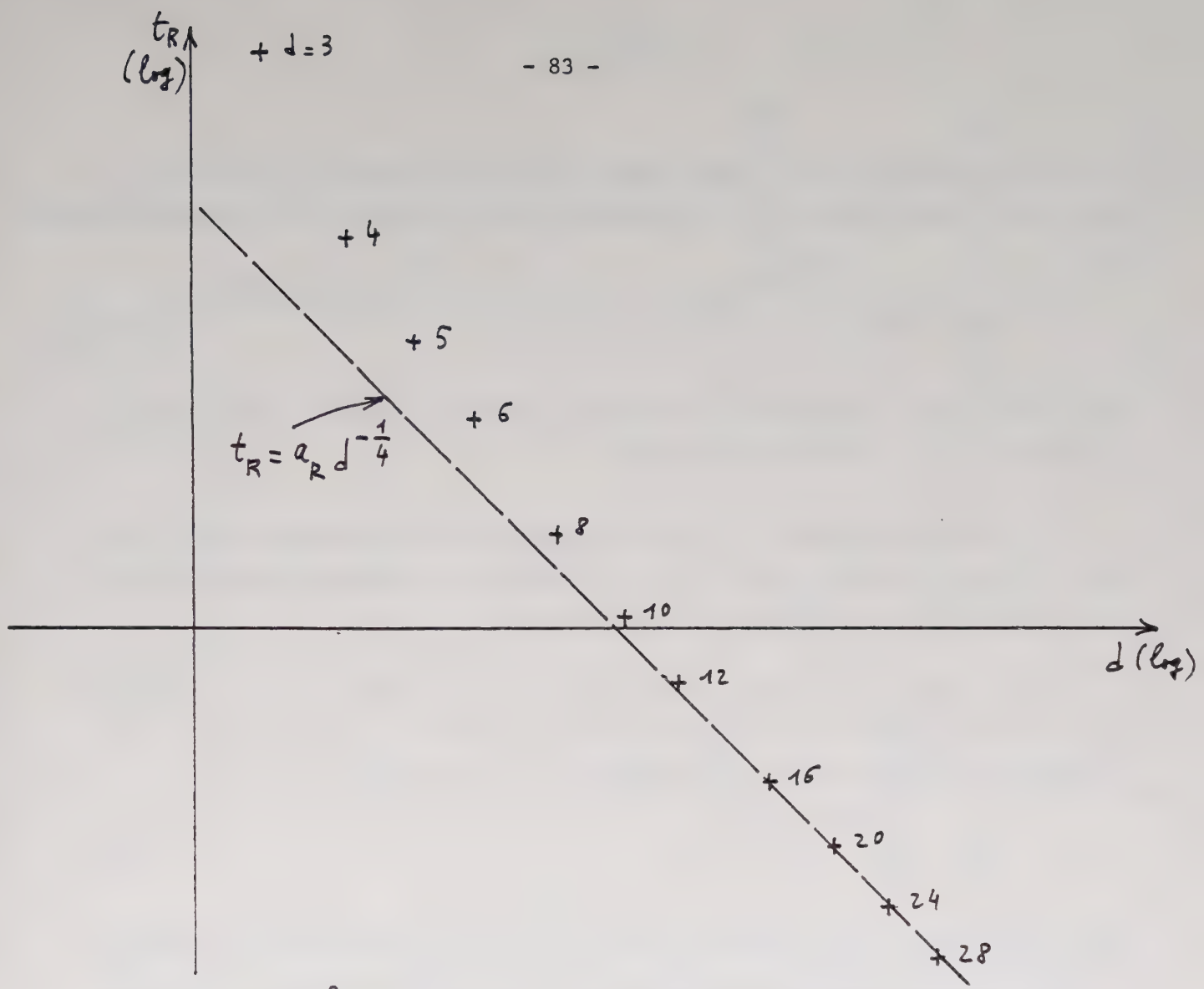
Ceci est une preuve que l'approximation S.O.S. est justifiée à d=3 ; et que la théorie effective à d=4 proposée dans [13] (théorie duale de deux modèles X-Y découplés) est également valable au voisinage de la transition rugueuse. Cette dernière est donc à basse dimension, une transition de délocalisation des surfaces tracées sur le réseau, due à des fluctuations de grande longueur d'onde.

Nous avons également examiné le cas des grandes dimensions ($d \gg 5$), pour le groupe $\mathbf{Z}_2$, afin de pouvoir comparer nos résultats avec ceux de [42] . Le tableau ci-dessous donne les moyennes des valeurs de t_R et θ obtenues à partir des 3 approximants de Padé les plus stables ([3/3],[4/2] et [4/3]), relatifs à la série de I.

d	$\overline{t_R}$	$\overline{\theta}$
3	0,429	0,179
4	0,370	0,163
5	0,340	0,151
6	0,318	0,142
8	0,289	0,130
10	0,270	0,123
12	0,256	0,119
16	0,236	0,113
20	0,223	0,110
24	0,212	0,107
28	0,204	0,106

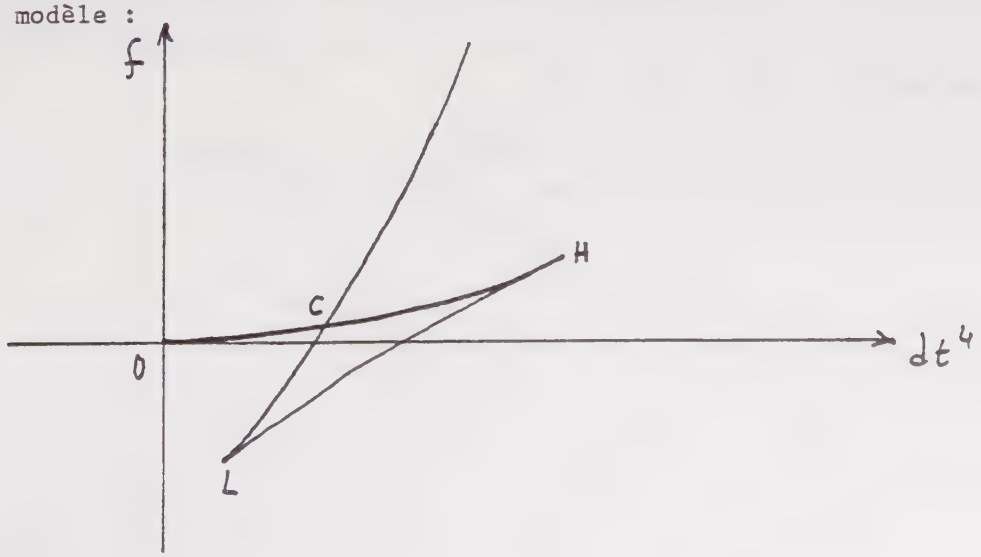
Le graphe de $t_R(d)$ en échelle log-log montre que l'on a asymptotiquement :

$$t_R \sim a_R\, d^{-1/4} \quad \text{avec} \quad a_R \approx 0,47 \qquad \text{(III.42)}$$



Quant à l'indice θ, il décroît de façon monotone et régulière en fonction de d. Ceci paraît être une propriété indépendante du groupe, comme le montrent nos résultats du paragraphe 2 pour $3 \lesssim d \lesssim 5$; il semble que, lorsque d croît, l'on s'éloigne progressivement d'une transition de type S.O.S. (indices III.41).

L'analyse en grande dimension, au moyen de la resommation des "arbres de cubes", exposée dans [42], conduit au diagramme suivant pour l'énergie libre du modèle :



Le point H, extrémité de la ligne métastable CH (sur laquelle se place la transition rugueuse pour $d \gg 5$) correspond à une abscisse donnée asymptotiquement par :

$$t_H = a_H\, d^{-1/4} \quad \text{avec} \quad a_H = \frac{4}{5}\, 10^{-1/4} = 0,449873... \qquad \text{(III.43)}$$

Cette valeur est confondue avec celle de t_R (formule III.42), compte tenu de l'imprécision de la méthode D-log-Padé.

La transition rugueuse ; ou plus exactement son prolongement analytique dans la phase métastable pour $d \gg 5$, se confond donc asymptotiquement ($d \to \infty$) avec l'extrémité de la zône de métastabilité.

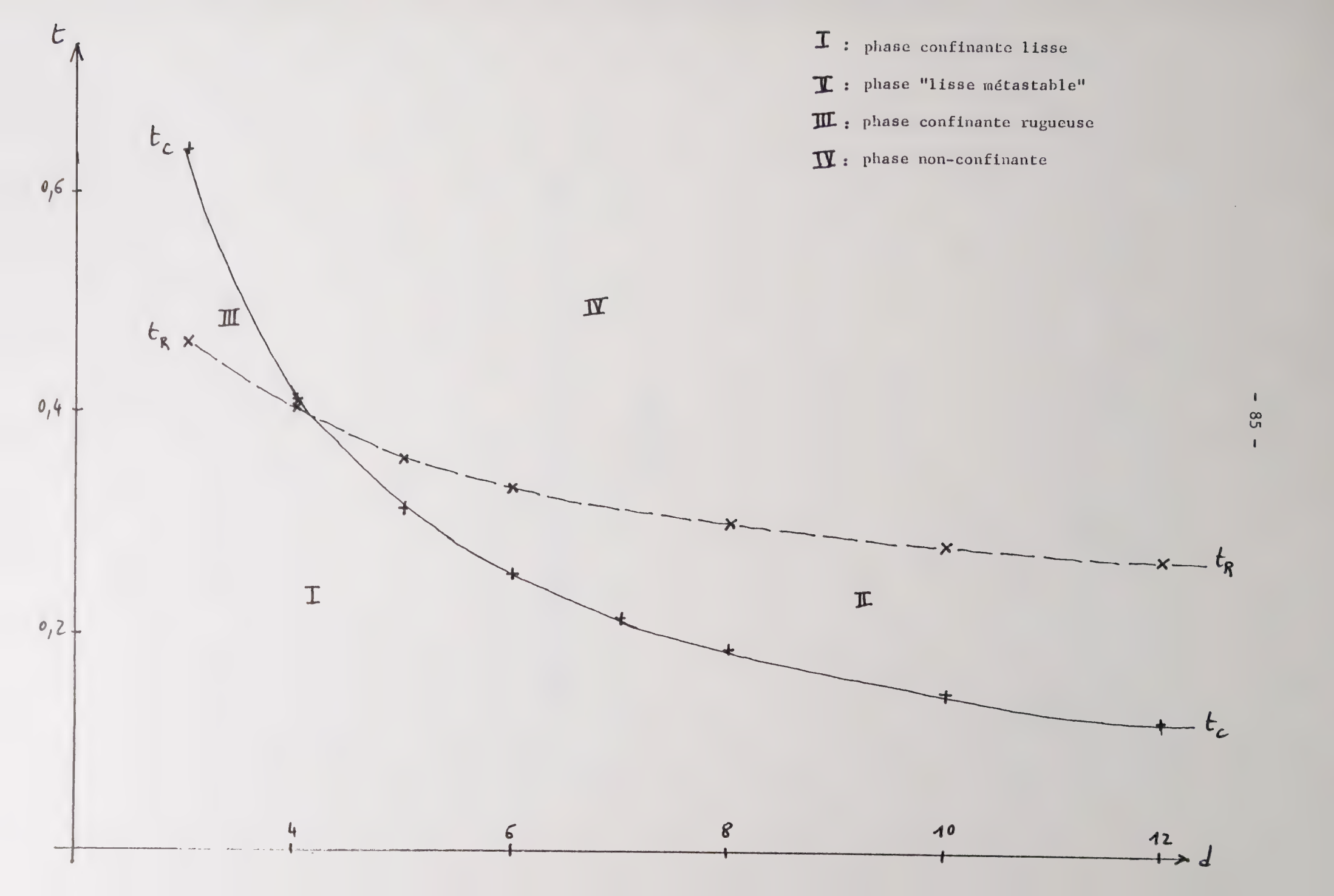
Dans le même article [42], J.M. Drouffe et J.B. Zuber ont mis en évidence une autre singularité de l'opérateur de localisation I, qui prend place sur la ligne non physique LH, à une température t'_R donnée par :

$$t'_R = 2^{1/4}\, d^{-3/4} \qquad \text{(III.44)}$$

Cette "autre transition rugueuse" serait due à des déformations très locales des surfaces, liées au comportement des arbres de cubes, qui sont les objets dominants pour d grand. Elle ne serait donc pas le prolongement naturel de la transition rugueuse habituelle, due à des effets à longue portée. Une autre preuve de la différence entre les deux mécanismes est la valeur de l'indice critique de l'indicateur I à $t=t'_R$: $\theta' = 1$; alors que θ semble tendre vers une valeur asymptotique $\theta_\infty \approx \frac{1}{10}$.

Nous donnons enfin l'allure des fonctions $t_c(d)$ et $t_R(d)$, toujours pour le groupe Z_2. $t_c(d)$ est donné asymptotiquement par des corrections systématiques au champ moyen ([9], déjà cité) :

$$t_c = \text{th}\left[\frac{1}{2(d-1)}\left\{2,7552 - \frac{0,912561}{d} + \frac{0,601169}{d^2} + \cdots\right\}\right] \qquad \text{(III.45)}$$


I : phase confinante lisse
II : phase "lisse métastable"
III : phase confinante rugueuse
IV : phase non-confinante
t
0,6
0,4
0,2
t_c
t_R
III
IV
I
II
4
6
8
10
12
d

CHAPITRE IV

ETUDE DE SYSTEMES DE TAILLE FINIE (METHODE DES RUBANS)

Ce travail[55] est une application à l'étude de la transition rugueuse de la méthode dite de *renormalisation phénoménologique*, qui consiste à extrapoler les résultats numériques exacts concernant des systèmes de largeur finie (qui sont des rubans, si le système de départ est bidimensionnel). Cette méthode, utilisée pour la première fois par Nightingale[45], a été appliquée dans de nombreux domaines de la mécanique statistique : polymères [46], localisation [47], modèle X-Y [48], percolation [49], etc... Elle reçut récemment une justification théorique pour $d < 4$ [53].

1) LA METHODE DES RUBANS

1.a) Formalisme hamiltonien et matrice de transfert

Un modèle de mécanique statistique bidimensionnel peut être défini par son action. Par exemple, notre modèle S.O.S. est défini par l'action (II.3) :

$$S = \sum_{\langle i,j \rangle} V(h_i - h_j)$$

qui est une version discrétisée d'une action invariante par rotation dans un espace-temps euclidien continu : c'est le formalisme euclidien.

On peut également particulariser une direction du réseau et appeler temps la variable (discrète) correspondante. On obtient alors une formulation du modèle qui utilise un opérateur d'évolution dans un temps discret, analogue au hamiltonien en mécanique quantique :

$$\langle h(t)|T|h(t+1)\rangle = \exp -\left[\sum_i V(h_i(t) - h_{i+1}(t)) + \sum_i V(h_i(t+1) - h_i(t))\right] \qquad \text{(IV.1)}$$

où l'on reconnaît respectivement une partie potentielle (interaction entre sites voisins) et une partie cinétique (évolution libre de chaque site) : c'est le *formalisme hamiltonien*. Si le nombre de configurations à un temps donné $\{h_i(t)\}$ est fini, alors l'opérateur T agit dans l'espace de dimension finie engendré par ces configurations : on l'appelle *matrice de transfert* du système.

1.b) Expression des quantités thermodynamiques

Supposons que l'opérateur T agisse dans un espace de dimension D. De même

qu'en mécanique quantique, T est équivalent à un opérateur hermitien ; on a donc :

$$T = \sum_{1 \leq a \leq D} \lambda_a P_a \qquad \text{(IV.2)}$$

où λ_a sont les valeurs propres (réelles) de T, rangées par ordre décroissant, et P_a les projecteurs orthogonaux correspondants.

Calculons d'abord l'énergie libre du système. La fonction de partition correspondant à une longueur de ruban τ avec conditions aux limites périodiques (au moins dans la direction temporelle) est

$$Z = \sum_{\{h\}} \langle h(1)|T|h(2)\rangle \cdots \langle h(\tau-1)|T|h(\tau)\rangle \langle h(\tau)|T|h(1)\rangle$$

Toutes ces sommes s'effectuent simplement pour donner :

$$\begin{aligned} Z &= \mathrm{Tr}\, T^{\tau} \\ &= \sum_a \lambda_a^{\tau} \end{aligned} \qquad \text{(IV.3)}$$

L'énergie libre (par unité de longueur) est donnée par :

$$-f = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \ln Z$$

Seule la plus grande valeur propre subsiste : l'opérateur d'évolution projette sur l'état fondamental lorsque l'intervalle de temps τ tend vers l'infini, et :

$$-f = \ln \lambda_1 \qquad \text{(IV.4)}$$

On peut calculer de même la longueur de corrélation du système. Une fonction de corrélation quelconque s'écrit (en supposant $t_1 < t_2$) :

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t_1)\varphi(t_2)\rangle = Z^{-1} \sum_{\{h\}} & \langle h(1)|T|h(2)\rangle \cdots \langle h(t_1-1)|T|h(t_1)\rangle \cdot \\ & \cdot \varphi(t_1) \langle h(t_1)|T|h(t_1+1)\rangle \cdots \langle h(t_2-1)|T|h(t_2)\rangle \cdot \\ & \cdot \varphi(t_2) \langle h(t_2)|T|h(t_2+1)\rangle \cdots \langle h(\tau)|T|h(1)\rangle \end{aligned}$$

Ces sommes s'effectuent encore simplement :

$$\langle \varphi(t_1)\varphi(t_2)\rangle = Z^{-1} Tr\left(\varphi T^{t_2-t_1} \varphi T^{\tau-(t_2-t_1)}\right)$$
$$= Z^{-1} \sum_{ab} \lambda_a^{t_2-t_1} \lambda_b^{\tau-(t_2-t_1)} \varphi_{ab} \qquad \text{(IV.5)}$$

où les $\varphi_{ab} = Tr(\varphi P_a \varphi P_b)$ sont indépendants de τ, t_1, t_2 .
La limite thermodynamique $(\tau \to \infty)$ conduit à :

$$\langle \varphi(t_1)\varphi(t_2)\rangle = \sum_b \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_1}\right)^{-(t_2-t_1)} \varphi_{1b} \qquad \text{(IV.6)}$$

Deux cas sont alors à envisager :

* Si φ_{11} est non-nul, la fonction de corrélation admet une limite non-nulle lorsque (t_2-t_1) tend vers l'infini, et le système possède une aimantation spontanée donnée par :

$$m^2 = \lim_{(t_2-t_1)\to\infty} \langle \varphi(t_1)\varphi(t_2)\rangle = \varphi_{11} \qquad \text{(IV.7)}$$

* Si φ_{11} est nul, alors la fonction de corrélation est en général dominée par le terme b = 2 :

$$\langle \varphi(t_1)\varphi(t_2)\rangle \sim \exp - \frac{t_2-t_1}{\xi} \qquad \text{(IV.8)}$$

où la longueur de corrélation est donnée par :

$$\xi = \frac{1}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \qquad \text{(IV.9)}$$

1.c) Choix d'un modèle S.O.S.

Pour étudier la transition rugueuse à 3 dimensions, nous avons introduit au chapitre II.1) les modèles S.O.S. Un tel modèle est défini par le potentiel d'interaction entre deux sites voisins $V(h_i-h_j)$. Afin d'obtenir des matrices de transfert de dimension finie, nous avons choisi le potentiel suivant :

$$V(0) = 0 \; ; \; V(\pm 1) = \beta \; ; \; V(n) = +\infty \text{ pour } |n| \geqslant 2. \qquad \text{(IV.10)}$$

Formellement, ce potentiel est la limite pour $\alpha \to \infty$ des fonctions : $V(h) = \beta |h|^{\alpha}$ ($\alpha = 1$ correspond au modèle S.O.S. proprement dit ; $\alpha = 2$ est le modèle gaussien discret). Cependant, notre fonction n'a pas une transformée de Fourier positive : son modèle X-Y dual, dont le potentiel d'interaction, relié à V par (II.23), est:

$$\exp - V^*(\psi) = 1 + 2e^{-\beta} \cos \psi$$

est mal défini pour $e^{-\beta} > \frac{1}{2}$

Notons enfin que ce modèle est très analogue à celui de Van Beijeren, qui utilise aussi un potentiel "tronqué". Nous utiliserons toujours la variable de température :

$$t = e^{-\beta} \in [0; 1]$$

Afin d'étudier les énergies de marche, nous avons considéré les conditions aux limites suivantes :

$$h_0 \equiv 0 \quad \text{et} \quad h_{N+1} \equiv \Delta \geqslant 0 \tag{IV.11}$$

Les deux extrémités du ruban de largeur N sont donc fixées, et forcent l'existence de Δ marches longitudinales le long du ruban.

L'espace des configurations est engendré par les N-uplets d'entiers $\{h_i\}$ tels que toutes les différences entre voisins soient 0 ou ± 1. Dans cet espace, la matrice de transfert s'écrit : $T = UV$ ou $V^{\frac{1}{2}} U V^{\frac{1}{2}}$ avec les définitions suivantes :

V est l'énergie potentielle, diagonale dans cette base $\{h_i\}$:

$$\langle \{h\} | V | \{h'\} \rangle = \delta_{\{h\}\{h'\}} \cdot t^{|h_1| + |h_2 - h_1| + \dots + |h_N - \Delta|} \tag{IV.12}$$

U est l'énergie cinétique, opérateur symétrique :

$$\langle \{h\} | U | \{h'\} \rangle = t^{|h_1 - h'_1| + \dots + |h_N - h'_N|}$$

Nous avons diagonalisé numériquement ces matrices T pour $1 \leq N \leq 5$ et $0 \leq \Delta \leq 2$. Les dimensions correspondantes sont données dans le tableau suivant.

D	$\Delta=0$	$\Delta=1$	$\Delta=2$
N=1	3	2	1
N=2	7	6	3
N=3	19	16	10
N=4	51	45	30
N=5	141	126	90

Ces dimensions croissent comme $3^N N^{-1/2}$, ce qui nous a limité au (petit) nombre N=5. Nous allons montrer que ces calculs confirment néanmoins notre compréhension de la transition rugueuse. Les quantités que nous avons étudiées en particulier sont :

- *les longueurs de corrélation : $$\xi_N^{(\Delta)} = \frac{1}{\ln \frac{\lambda_{1,N}^{(\Delta)}}{\lambda_{2,N}^{(\Delta)}}} \qquad \text{(IV.13)}$$

- *les énergies de marche : $$f_{st,N} = -\ln \frac{\lambda_{1,N}^{(1)}}{\lambda_{1,N}^{(0)}}$$ $$f'_{st,N} = -\ln \frac{\lambda_{1,N}^{(2)}}{\lambda_{1,N}^{(1)}}$$

- *les longueurs de localisation : Λ_N (voir paragraphe 4)

Remarques : * Les deux quantités $f_{st,N}$ et $f'_{st,N}$, qui sont différentes tant que la largeur N est finie, tendent vers la même énergie de marche pour N infini, comme on peut s'en rendre compte dans un développement de basse température :

$$-f_{st} = -f'_{st} = \ln t + 2t + \cdots \qquad \text{(IV.14)}$$

* Une légère modification de la matrice de transfert correspondant à $\Delta = 0$ et à une largeur N donne également les résultats correspondant à une largeur (N+1) avec conditions aux limites périodiques.

2) COMPORTEMENT DES LONGUEURS DE CORRELATION

2.a) Cadre général : le "finite-size scaling"

Cette hypothèse, formulée à l'origine par Fisher[40,52], a été utilisée dans de nombreux travaux pour extrapoler des données concernant des systèmes finis (méthode de Monte Carlo) ou partiellement infinis (méthode des rubans), et en tirer des informations sur le système infini correspondant (limite thermodynamique)[45,47,48,51]. Cet outil puissant ne reçut, à notre connaissance, de justification théorique que récemment, par E. Brézin[53].

Le point essentiel est l'équation suivante, qui relie les quantités calculées dans le système infini et dans un ruban de largeur N :

$$\frac{Q_N(t)}{Q_\infty(t)} = F_Q\left(\frac{N}{\xi_\infty(t)}\right) \qquad \text{(IV.15)}$$

où F_Q est une fonction d'échelle, ne dépendant que de Q et de la classe d'universalité du modèle. Cette relation est supposée être valable asymptotiquement lorsque N et ξ_∞ sont tous deux grands.

E. Brézin montre d'abord que la longueur N ne nécessite pas de renormalisation particulière. En d'autres termes, les contre-termes nécessaires sont identiques quelle que soit la géométrie du système. Il en découle que la relation d'échelle (IV.15) est asymptotiquement vraie, pourvu que les fonctions qui interviennent dans les calculs intermédiaires ne soient pas singulières au point fixe $g = g^*$ de la théorie. Supposons cette condition remplie (nous verrons qu'elle l'est pour $d < 4$).

Lorsque t tend vers sa valeur critique t_R, Q_∞ et ξ_∞ divergent (soient α et ν leurs indices critiques respectifs), alors que Q_N reste fini pour N fini (un ruban est en réalité un système unidimensionnel, donc sans transition de phase). On en déduit que :

$$F_Q(x) \sim \text{cst.}\ x^{\frac{d}{\nu}} \quad (x \longrightarrow 0) \tag{IV.16}$$

Considérons le cas particulier Q = ξ . Pour N et M fixés, définissons la transformation t → t' par :

$$\frac{N}{M} = \frac{\xi_\infty(t)}{\xi_\infty(t')} \tag{IV.17}$$

Alors la formule (IV.15) nous donne :

$$\frac{\xi_N(t)}{\xi_M(t')} = \frac{N}{M} = \frac{\xi_\infty(t)}{\xi_\infty(t')} \tag{IV.18}$$

Notre transformation dilate donc toutes les longueurs (N et ξ_N) dans un rapport donné $\frac{N}{M}$. L'équation (IV.18), qui donne la variation correspondante de la constante de couplage t, est l'équation de "renormalisation phénoménologique", analogue à l'équation de Callan-Symanzik pour les systèmes de taille finie.

En particulier, le point fixe de cette transformation est le point critique t = t_R, et la linéarisation de (IV.18) autour de ce point donne l'indice ν :

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right) \ln \frac{N}{M} = \ln \frac{\xi_N(t_R)}{\xi_M(t_R)} \tag{IV.19}$$

La condition de régularité des fonctions d'échelle n'est cependant pas toujours vérifiée. Par des calculs explicites sur le modèle sphérique (limite $n \longrightarrow \infty$ du modèle à symétrie globale O(n)), E. Brézin montre, toujours dans [53], que l'hypothèse de Fisher *n'est vérifiée que pour d < 4.* Dans le cas particulier Q = ξ , il obtient :

$$\begin{cases} * \quad \xi_N(t_R) \approx a\, N & \text{pour } d < 4 \text{ (loi d'échelle "normale" pour } g^* \neq 0) \\ \quad \text{avec } a \sim (4\pi^2\varepsilon)^{-1/3} & \text{pour } \varepsilon = 4-d \longrightarrow 0 \\ * \quad \xi_N(t_R) \approx N\left(\frac{\ln N}{4\pi^2}\right)^{1/3} & \text{pour } d=4 \\ * \quad \xi_N(t_R) \approx \text{cst.}\, N.\, N^{\frac{d-4}{3}} & \text{pour } d > 4 \text{ (loi d'échelle "anormale" pour } g^* = 0) \end{cases} \tag{IV.20}$$

Ces résultats semblent également s'appliquer aux modèles à n fini (Ising ou Heisenberg).

2.b) Deux modèles solubles bidimensionnels

En prenant successivement l'exemple du modèle d'Ising bidimensionnel et celui du modèle "gaussien discret" introduit en II.5.a), nous nous proposons d'établir le lien entre le comportement des longueurs de corrélation ξ_N et les propriétés du système bidimensionnel.

α) *Modèle d'Ising.* Les longueurs de corrélation ξ_N du modèle d'Ising bidimensonnel anisotrope (couplages $t_1=e^{-2\beta_1}$ et $t_2=e^{-2\beta_2}$) sont connues exactement pour tout N [17;45;50]. On a :

$$\frac{1}{\xi_N} = \frac{1}{2}\left(\gamma_1 - \gamma_2 + \cdots + \gamma_{2N-1} - \gamma_{2N}\right) \qquad \text{(IV.21)}$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{ch}\gamma_i = \lambda - \mu \cos\frac{i}{N}\pi \\ \lambda = \dfrac{1+t_2^2}{2t_2}\cdot\dfrac{1+t_1^2}{1-t_1^2} \quad ; \quad \mu = \dfrac{1-t_2^2}{t_2}\cdot\dfrac{t_1}{1-t_1^2} \end{array} \right.$$

Le point critique est donné par : $\lambda - \mu = 1$, ou encore :

$$\frac{2t_1}{1-t_1^2} = \frac{1-t_2^2}{2t_2} \quad \text{ou} \quad \operatorname{sh}2\beta_1 \operatorname{sh}2\beta_2 = 1 \qquad \text{(IV.22)}$$

En ce point, la formule d'Euler-Mac-Laurin (II.107) conduit à :

$$\frac{2}{\xi_N} = \frac{\pi}{4N}\left[F'(2\pi-\varepsilon) - F'(0+\varepsilon)\right] + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

où $F(x) = \operatorname{Argch}(\lambda - \mu\cos x)$ est une fonction périodique, mais non-différentiable à l'origine :

$$F(x) \sim \frac{2t_2}{1-t_2^2}\,|x| \quad \text{pour} \quad x \to 0$$

Ce qui donne finalement :

$$\xi_N \approx a N \quad \text{avec} \quad a = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1-t_2^2}{2t_2} \tag{IV.23}$$

Dans le cas particulier isotrope ($t_1=t_2 \Rightarrow t_c = \sqrt{2}-1$), cette relation s'écrit :

$$a = \frac{4}{\pi}$$

ou encore :

$$\boxed{a\,\eta = \frac{1}{\pi}} \tag{IV.24}$$

car la solution du modèle infini donne la valeur $\eta = \frac{1}{4}$ pour l'indice des corrélations au point critique. Dans la phase ordonnée de basse température, la fonction F(x) est analytique sur $[0,2\pi]$, et la formule (IV.21) donne un résultat nul à tous les ordres en $\frac{1}{N}$. On peut cependant calculer le comportement dominant de ξ_N par transformation de Fourier : si $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n e^{inx}$ alors :

$$\frac{1}{N} \sum_{1\le j\le N} F\left(2\pi \frac{j}{N}\right) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,dx = 2\,\mathrm{Re}\left[F_N + F_{2N} + \cdots + F_{mN} + \cdots\right]$$

Et le comportement de F_N est donné par la méthode du col : l'intégrale $\int_0^{2\pi} \mathrm{Arch}(\lambda-\mu\cos x)\, e^{iNx}\,dx$ conduit à l'équation du col :

$$\mu \sin x_c = -iN\left[(\lambda-\mu\cos x_c)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{Arch}(\lambda-\mu\cos x_c)$$

et F_N se comporte donc comme e^{iNx_c} avec (pour N grand) :

$$e^{-ix_c} \approx \left[(1-\lambda)^2 + 1 - \mu^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[(1-\lambda)^2 - \mu^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{IV.25}$$

(ce nombre est un réel plus grand que 1)

On a donc :

$$\xi_N \sim \left(e^{-ix_c}\right)^N \tag{IV.26}$$

Les longueurs de corrélation croissent donc exponentiellement avec N. Dans le cas particulier du modèle isotrope, on a : $\exp(ix_c) = t(1+t)/(1-t)$, et l'on retrouve le résultat annoncé par P.G.Watson ([38], vol.II. chap.4) :

$$\xi_N \sim e^{N f_B} \qquad \text{(IV.27)}$$

où $f_B = -\ln\left(t\frac{1+t}{1-t}\right)$ est l'énergie libre d'interface ou "tension superficielle" du modèle.

β) *Modèle discret gaussien*

Nous allons considérer le modèle défini par une version anisotrope de l'action (II.93) :

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left[\beta_1 (h_{ij} - h_{i,j+1})^2 + \beta_2 (h_{ij} - h_{i+1,j})^2\right] \qquad \text{(IV.28)}$$

Nous nous proposons de calculer la fonction de corrélation : $\Gamma(\ell) = \langle e^{i(\theta_{00} - \theta_{0\ell})} \rangle$ dans le modèle bidimensionnel infini, et pour des rubans de largeur N ($1 \leq i \leq N$). L'action étant gaussienne, la formule (II.41) nous permet d'écrire :

$$\Gamma(\ell) = \exp -\frac{1}{2}\int \widetilde{dp}\, \frac{1 - \cos p_2 \ell}{\beta_1 + \beta_2 - \beta_1 \cos p_1 - \beta_2 \cos p_2} \qquad \text{(IV.29)}$$

où toute la différence entre les rubans et le système infini est contenue dans la mesure $\widetilde{dp}$:

Si N est fini, alors $\int \widetilde{dp} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dp_2}{2\pi} \cdot \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i_1 \leq N}$ avec $p_1 = 2\pi \frac{i_1}{N}$.

Tous les termes avec $i_1 \neq N$ convergent pour $\ell \to \infty$. Le terme $i_1 = N$ conduit à l'intégrale élémentaire $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dp_2}{2\pi} \frac{1 - \cos p_2 \ell}{1 - \cos p_2} = \ell$

et donc $\Gamma_N(\ell) \sim e^{-\ell/\xi_N}$ avec $\xi_N = 2\beta_2 N$ (IV.30)

Si N est infini, alors le comportement pour ℓ grand est obtenu en remplaçant le dénominateur de (IV.29) par :

$\frac{1}{2}(\beta_1 p_1^2 + \beta_2 p_2^2)$, ce qui conduit à :

$$\Gamma_\infty(\ell) \sim \ell^{-\eta} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{1}{2\pi (\beta_1 \beta_2)^{1/2}} \qquad \text{(IV.31)}$$

On a donc la relation : $$a\eta = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(IV.32)}$$

qui donne encore (IV.24) dans le cas isotrope.

Entre les deux régimes (IV.30) et (IV.31) de décroissance des corrélations, la fonction $\ln \Gamma_N(\ell)$ prend la forme asymptotique suivante (toujours dans le cas isotrope : $\beta_1 = \beta_2 = \beta$) :

$$\Psi_N(\ell) = -2\beta \ln \Gamma_N(\ell) = \frac{1}{\pi} \ln N + \varphi\left(\frac{\ell}{N}\right) \qquad \text{(IV.33)}$$

où la fonction $\varphi(x)$ réalise l'interpolation entre les deux comportements :

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{\pi} \ln x \quad \text{pour } x \to 0$$

$$\varphi(x) \sim x \quad \text{pour } x \to \infty$$

On peut déterminer numériquement la fonction φ, en remarquant que l'intégration sur dp_2 se fait exactement, et conduit à :

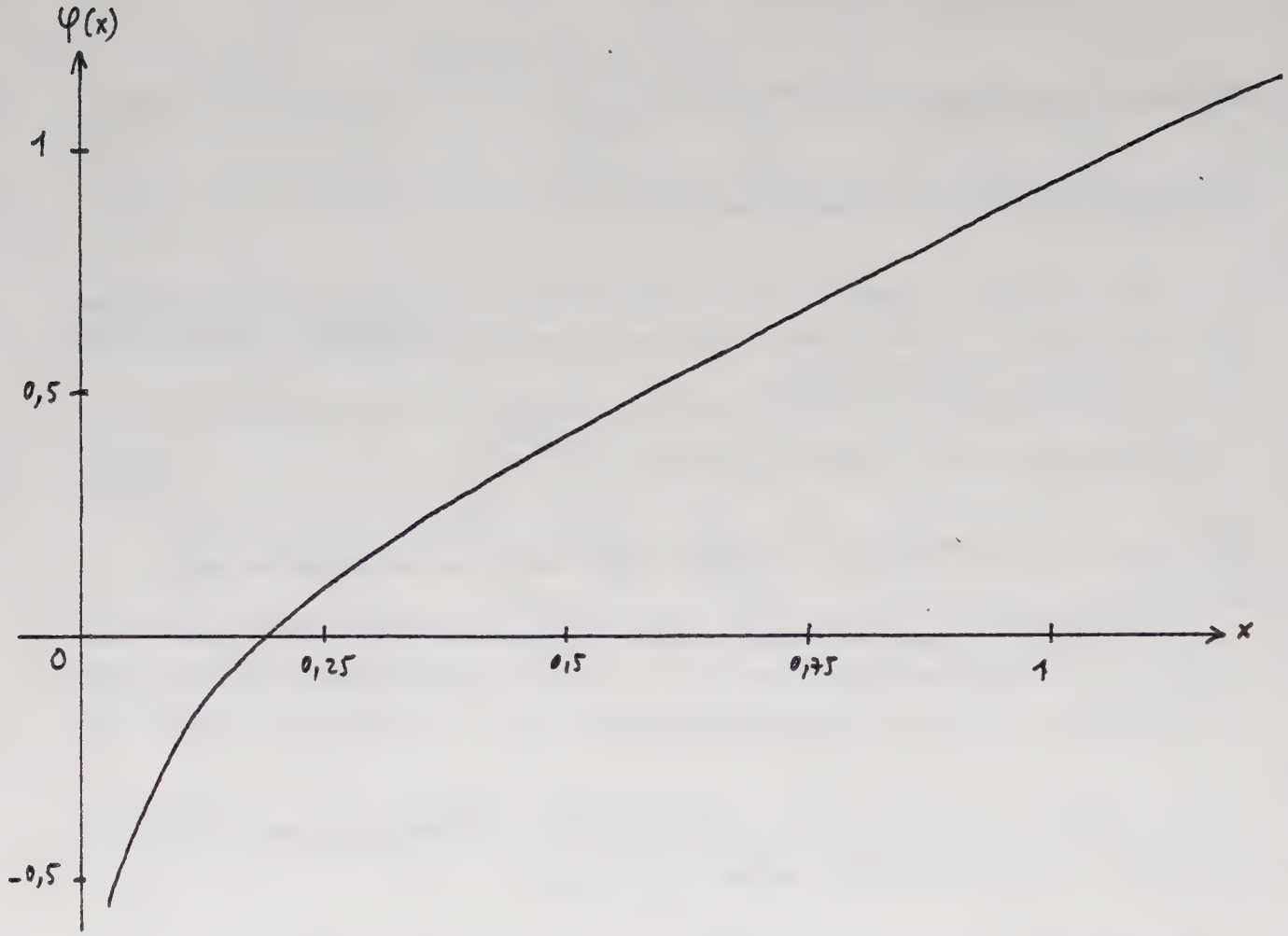
$$\Psi_N(\ell) = \frac{1}{N} \sum_{1 \le m \le N} \frac{1 - e^{-\ell x_m}}{\operatorname{sh} x_m} \quad \text{avec} \quad \operatorname{ch} x_m + \cos 2\pi \frac{m}{N} = 2$$

Le calcul de cette somme pour N=5000 conduit aux développements asymptotiques suivants :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \ln x + 0,501\,468\,62 + \frac{\pi}{6} x^2 + o(x^4) \quad \text{pour } x \to 0$$

$$\varphi(x) = x - 0,070\,327\,6 - \frac{1}{\pi} e^{-2\pi x} - \frac{1}{2\pi} e^{-4\pi x} + o(e^{-6\pi x}) \quad \text{pour } x \to \infty$$

qui suffisent à déterminer $\varphi(x)$ avec une précision meilleure que 3.10^{-4} :



Nous allons enfin proposer une généralisation de (IV.24) en dimension quelconque, en considérant le modèle discret gaussien isotrope défini sur un réseau hypercubique en dimension d. Ce réseau sera étendu à tout l'espace $\mathbb{Z}^d$, ou à un barreau, infini dans une direction, et d'aire transverse N^{d-1} dans les directions orthogonales.

Dans le cas du barreau, le calcul est analogue à celui du cas d=2, et donne :

$$\Gamma_N(\ell) \sim e^{-\ell/\xi_N} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} \xi_N = a\, N^{d-1} \\ a = 2\beta \end{array} \right. \qquad \text{(IV.34)}$$

Dans le cas du système infini, il faut tenir compte du fait que le modèle a une aimantation spontanée m pour $d \geqslant 3$. La partie "connexe" de Γ_∞ est alors donnée par :

$$\ln \frac{\Gamma_\infty(\ell)}{m^2} = \frac{1}{2\beta} \int \tilde{dp} \, \frac{\cos p_1 \ell}{\sum_\mu (1 - \cos p_\mu)}$$

Le comportement pour ℓ grand de cette intégrale est encore obtenu en remplaçant le propagateur par son approximation continue $\frac{1}{p^2}$, ce qui conduit à :

$$\ln \frac{\Gamma_\infty(\ell)}{m^2} = \frac{1}{\beta\, c_d\, \ell^{d-2}} \qquad \text{(IV.35)}$$

où C_d est la constante de Poisson, introduite en (II.71). Définissons la charge Q des fonctions de corrélation par : $-\Delta \ln \Gamma_\infty = Q\, \delta(\vec{r})$.
Alors (IV.34-35) permettent d'écrire une généralisation de (IV.24) indépendante de d :

$$a\, Q = 2 \qquad \text{(IV.36)}$$

Cette relation relie les effets des modes de masse nulle du modèle dans les deux géométries étudiées ; elle est en parfait accord avec la notion d'invariant géométrique introduite par J.L. Pichard et G. Sarma[47] pour d=2 et d=3. Notons également que (IV.20) et (IV.34) ne sont pas contradictoires : cette dernière formule, en termes de modèles de spins, concerne la phase de basse température, où le système possède une aimantation m non-nulle, à laquelle se superposent des ondes de spins ; alors que (IV.20) s'applique au point critique, et fait naturellement jouer un rôle particulier à d=4, valeur qui sépare les régions $g^*=0$ et $g^*\neq 0$.

2.c) Application à notre modèle de surface S.O.S.

Les variations des longueurs de corrélation ξ_N en fonction de N sont données dans les figures 1 à 3 (à la fin de ce chapitre). Ces variations de ξ_N suivent deux régimes différents, selon la valeur de t :

α) *à haute température* ($t > 0.6$), ξ_N croît linéairement avec N, ce qui indique que le système est invariant d'échelle ($\xi = \infty$). Ceci est en parfait accord avec ce que l'on sait de la phase de basse température du modèle dual (phase d'ondes de spins du modèle X-Y ou phase diélectrique du gaz coulombien). La pente de ces droites dépend peu de la valeur de t :

$$a \approx 0{,}3 \qquad \text{pour} \quad 0{,}6 < t < 1 \qquad \text{(IV.37)}$$

Cette pente permet de calculer l'indice η en appliquant la formule (IV.18) :

$$\eta_{\xi} = 1 \pm 0,1 \qquad \text{(IV.38)}$$

On sait que la solution d'Onsager du modèle d'Ising donne $\eta = \frac{1}{4}$; d'autre part, J.L. Pichard et G. Sarma ont obtenu, pour le problème de localisation et en appliquant (IV.18), un indice η variant entre 0 (t=0) et $\frac{1}{2}$ ($t=t_c$). Les différences apparentes entre modèles proviennent du fait que l'on ne sait pas quelles corrélations sont décrites par η tel que $\alpha\eta = \frac{1}{\pi}$: corrélations des valeurs du champ, de son carré, etc...

β) *à basse température* ($t < 0.5$), on observe des comportements dépendant beaucoup des conditions aux limites :

* Si $\Delta = 0$ (surface plate), alors $\xi_N(t)$ tend vers une valeur asymptotique qu'il est raisonnable de prendre pour valeur de $\xi_\infty(t)$, longueur de corrélation du modèle infini.

* Si $\Delta = 1$ ou 2 (surface présentant 1 ou 2 marches longitudinales), alors ξ_N croît plus vite que N. Ceci est à rapprocher du comportement exponentiel (IV.26) dans le cas du modèle d'Ising à $T < T_c$.

On peut expliquer qualitativement l'effet de l'introduction d'une marche dans le système en termes du spectre de la matrice de transfert T : si la surface est plate, les premières excitations (qui dominent à t faible) coûtent une quantité d'énergie finie pour nucléer une aspérité locale sur la surface lisse. Alors que, pour $\Delta \neq 0$, la marche qui court le long du ruban peut avoir des modes mous (de déformations de grande longueur d'onde) et il n'y a pas de bande interdite au-dessus du fondamental.

2.d) Renormalisation phénoménologique et valeur de t_R

L'étude de quantités comme $\xi_N(t)$ ou $f_{st,N}(t)$, calculées pour les rubans de largeur N, peuvent nous renseigner sur le système bidimensionnel infini : il suffit pour cela d'appliquer les idées de renormalisation phénoménologique résumées en 2.a).

Dans notre modèle, l'équation (IV.17) ne présente pas de point fixe. Mais le fait que nos points représentant $\xi_N(N)$ se placent sur des droites ne passant

pas par l'origine nous suggéra d'écrire une version invariante par translation sur N de l'équation du groupe de renormalisation :

$$\frac{\xi_N(t) - \xi_{N-1}(t)}{\xi_{N-1}(t') - \xi_{N-2}(t')} = 1 \qquad \text{(IV.39)}$$

Cette version est mieux adaptée à notre problème, puisqu'elle a un point fixe facilement calculable pour N=3,4,5 et Δ =0,1,2, ainsi que pour les conditions aux limites périodiques. L'extrapolation de ces quatre suites de valeurs à N= ∞ conduit de façon très stable à une valeur de la température critique :

$$t_R = 0,60 \pm 0,01 \qquad \text{(IV.40)}$$

3) ENERGIE DE MARCHE ET FONCTIONS "D'ECHELLE"

3.a) Extrapolation des énergies de marche

Nous nous proposons de déterminer l'énergie de marche f_{st} en extrapolant les quantités $f_{st,N}$ et $f'_{st,N}$ définies en (IV.13). Nous avons déjà signalé que ces deux quantités, différentes tant que N est fini, doivent tendre vers une seule fonction $f_{st}(t)$ pour N infini. Dans la phase de haute température ($t > t_R$), on remarque que l'on a approximativement :

$$f'_{st,N} \approx 4 f_{st,N} \approx \frac{cst(t)}{N}$$

ce qui nous conduit à extrapoler la suite des quantités :

$$y_N = \frac{1}{3}\left[4 f_{st,N} - f'_{st,N}\right]$$

Notre méthode d'extrapolation est la suivante :

* construire à partir de $y_1 \ldots y_j$ le polynôme d'interpolation de Lagrange P_j (de degré j-1) qui reproduit ces valeurs de y_i pour des abscisses $x_i = \frac{1}{i}$ ($1 \leq i \leq j$)

* extrapoler les valeurs $P_j(o)$ en supposant une convergence géométrique (cette hypothèse se justifie de la façon suivante : la première étape supprime tous les termes d'un développement en $\frac{1}{N}$ ($y_N = a_0 + \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \ldots$) jusqu'à l'ordre j ; les termes négligés dans $P_j(o)$ sont d'ordre $j^{-j} \lesssim \exp - cst.\, j$).

Cette méthode donne les résultats suivants :

pour $0.6 < t < 1$, on obtient $|f_{st}| \lesssim 2.10^{-3}$, et avec des signes variables. Rappelons que dans cette phase, on s'attend à obtenir $f_{st} \equiv 0$: la précision de notre méthode est donc de l'ordre de 2.10^{-3}.

pour $t < 0.6$, les valeurs obtenues sont données dans le tableau suivant :

t	f_{st}
0,250	0,860
0,300	0,583
0,350	0,345
0,400	0,156
0,425	0,088
0,450	0,042
0,475	0,016
0,500	0,004
0,525	0,001
0,550	0,000

3.b) Détermination de l'indice critique ν

Le comportement critique attendu pour la quantité f_{st} est de la forme :

$$f_{st} \sim \xi^{-1} \sim \exp - \frac{b}{(t_R - t)^{\nu}} \qquad \text{(IV.41)}$$

avec $t_R = 0.60 \pm 0.01$ (IV.40).

Pour trouver les valeurs de b et ν correspondant à notre modèle, nous avons porté les valeurs de $\ln f_{st}$ données dans le tableau ci-dessus, en fonction de $(0.6-t)^{-\nu}$ pour différentes valeurs de ν . L'alignement le meilleur des points correspondant à des (t_R-t) petits est obtenu pour $\nu = \frac{1}{2}$ (voir figure 4). Ceci ne constitue pas une détermination précise de ν , mais suffit pour exclure des valeurs de ν telles que $\frac{1}{4}$ ou 1. Il nous paraît raisonnable d'affirmer :

$$\nu = 0,5 \pm 0,2$$

La valeur de b correspondant à $\nu = \frac{1}{2}$ est : $b = -3.79$.

Remarques

* L'énergie de marche nous a conduit à une valeur de ν plus précise qu'une extrapolation analogue d'une autre quantité ("fonction β ")[48], qui conduisit les auteurs de cet article à $\nu = 0.9 \pm 0.4$.

* Comme le montre clairement la figure 4, l'énergie de marche est très bien représentée par (IV.41) avec ($\nu = \frac{1}{2}$, $b = -3.79$) pour des valeurs de (t_R-t) jusqu'à 0.3 : le comportement critique représente donc très bien f_{st} dans la moitié de la phase lisse.

* Le point précédent montre que la superposition à la singularité essentielle (IV.41) d'une singularité algébrique (III.30) était parfaitement inutile ici. Cette singularité algébrique est d'ailleurs absente du modèle de Van Beijeren (III.32).

3.c) Fonctions d'échelle relatives à l'énergie de marche et aux longueurs de corrélation

Nous avons vu que la renormalisation phénoménologique était fondée sur l'existence de "fonctions d'échelle" (IV.15). Notre connaissance relativement précise de ξ (t) nous permet de construire point par point ces fonctions correspondant à différentes quantités.

α) *énergies de marche* (figure 5)

Les points représentés correspondent à $\left| \begin{matrix} .25 \leq t \leq .5 \\ N=3,4,5 \end{matrix} \right.$. On voit clairement l'existence de deux fonctions F et F' :

$$\frac{f_{st,N}}{f_{st}} = F\left(\frac{N}{\xi_\infty}\right) \quad ; \quad \frac{f'_{st,N}}{f_{st}} = F'\left(\frac{N}{\xi_\infty}\right)$$

Ces deux fonctions vérifient la propriété attendue :

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} F'(x) = 1$$

β) *longueurs de corrélation* (figure 6)

Les points représentés correspondent à $\left|\begin{array}{l} .25 \leq t \leq .5 \\ N=3,4,5 \end{array}\right.$, et aux deux types de conditions aux limites : $\Delta = 0$ et $\Delta = 2$.

Les fonctions d'échelle correspondantes :

$$G^{(0)}\left(\frac{N}{\xi_\infty}\right) = \frac{\xi_N^{(0)}}{\xi_\infty} \quad et \quad G^{(2)}\left(\frac{N}{\xi_\infty}\right) = \frac{\xi_N^{(2)}}{\xi_\infty}$$

ont des comportements asymptotiques différents pour x grand, en accord avec la discussion du paragraphe 2.b) :

* $G^{(0)}(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers l'infini, comme F(x) et F'(x) : les longueurs de corrélation de la surface plate, comme celles du modèle d'Ising à $T > T_c$, approchent leur valeur ξ_∞ .

* $G^{(2)}(x)$ croît rapidement pour $x > 10$, car les longueurs de corrélation correspondantes croissent exponentiellement, comme dans la phase ordonnée ($T < T_c$) du modèle d'Ising.

Pour x petit, les deux fonctions $G^{(0)}$ et $G^{(2)}$ se confondent et croissent linéairement avec x :

$$G^{(0)}(x) \approx G^{(2)}(x) \simeq a\,x$$

avec $a \approx 0.3$ (IV.37).

Remarque. Dans le cas d'une divergence non-algébrique de la longueur de corrélation, une forme légèrement différente de l'équation (IV.15) a été proposée[48] :

$$\frac{\ln Q_N(t)}{\ln Q_\infty(t)} = G_Q\left(\frac{\ln N}{\ln \xi_\infty(t)}\right) \qquad (IV.42)$$

et utilisée avec succès[47] par J.L. Pichard et G. Sarma, qui disposaient de résultats concernant des rubans de largeur N allant jusqu'à 12. Dans notre cas, N et ξ_∞ sont des nombres relativement petits, et la singularité de $\ln x$ pour x=1 nous empêche de voir tout comportement universel de la forme (IV.42). Un remède serait de remplacer N et ξ_∞ respectivement par λN et $\lambda \xi_\infty$. Plutôt que d'adopter (IV.42) avec ajustement de λ (qui serait de toute façon une méthode biaisée), nous avons choisi (IV.15), qui nous donne des résultats cohérents, et sans aucun paramètre libre.

4) ETUDE DE LA LOCALISATION DE LA SURFACE

4.a) Profil des rubans

Après avoir étudié des quantités locales (longueurs de corrélation, énergie de marche), nous allons nous intéresser aux propriétés globales de notre modèle de surface S.O.S., et en particulier à ses fluctuations de grande longueur d'onde.

Nous avons introduit au paragraphe (II.1.b) une quantité (II.4) qui reflète les propriétés de localisation de la surface. L'analogue de cette observable pour un ruban est :

$$p(z,L) = \langle \delta [h_1(0) - h_1(L) - z] \rangle \qquad \text{(IV.43)}$$

où $h_1(t)$ désigne l'altitude en un point quelconque du ruban au "temps" t.

Nous allons montrer que p(z,L) s'obtient facilement à partir de la matrice de transfert avec conditions aux limites périodiques. Remarquons d'abord qu'un état quelconque $\{ h_i(t) \}$ des N points de la surface situés au "temps" t peut s'écrire sous forme du produit tensoriel :

$$| h_i(t) \rangle = | c(t) \rangle \otimes | a(t) \rangle = | c(t), a(t) \rangle \qquad \text{(IV.44)}$$

où a(t) désigne l'altitude de l'un quelconque de ces N points (par exemple $a(t)=h_1(t)$), et c(t) désigne l'ensemble des différences d'altitudes entre ces N points caractéristiques de la structure interne de la surface au temps t. Deux états $| c,a \rangle$ et $| c,b \rangle$ se déduisent l'un de l'autre par une translation globale (verticale) d'amplitude $\delta h = b-a$.

On a alors :

$$\pi(z,L) = Z^{-1} \sum_{\{c,a\}} \langle c_0, 0 | T | c_1, a_1 \rangle \cdots \langle c_{L-1} a_{L-1} | T | c_L a_L \rangle \, \delta(a_L - z) \cdot$$
$$\cdot \langle c_L a_L | T | c_{L+1} a_{L+1} \rangle \cdots \langle c_N a_N | T | c_0, 0 \rangle$$

(IV.45)

Introduisons la variable $p_i \in [0, 2\pi]$ duale de a_i :

$$| c_i a_i \rangle = \int \frac{dp_i}{2\pi} e^{i p_i a_i} | c_i p_i \rangle$$

Les éléments de matrice de T prennent alors la forme simple :

$$\langle c_0, q | T | c_1, p \rangle = 2\pi \delta(p-q) \langle c_0 | \tau_p | c_1 \rangle$$

avec $$\langle c_0 | \tau_p | c_1 \rangle = \sum_a \langle c_0 0 | T | c_1 a \rangle e^{ipa}$$ (IV.46)

Notre potentiel V n'autorisant que des différences de hauteurs valant 0, ±1, la matrice τ_p prend la forme :

$$\tau_p = A + B e^{ip} + B^+ e^{-ip}$$ (IV.47)

τ_p agit dans l'espace des états $| c \rangle$ avec conditions aux limites périodiques, comme le montre clairement (IV.46). On a alors :

$$\pi(z,L) = \frac{\int \frac{dp\,dq}{(2\pi)^2} \, Tr\, \tau_p^L \, Tr\, \tau_q^{M-L} \, e^{i(p-q)z}}{\int \frac{dp}{2\pi} \, Tr\, \tau_p^M}$$

où la trace porte sur l'indice $| c \rangle$.

Le passage à la limite thermodynamique ($M \to \infty$) se fait par la méthode du col sur q, et conduit à :

$$\pi(z,L) = \int \frac{dp}{2\pi} \exp\left[L \ln \lambda_1(p) + i p z \right]$$ (IV.48)

où $\lambda_1(p)$ est la plus grande valeur propre de τ_p .
$\lambda_1(p)$ est une fonction réelle et paire en p, que nous développons sous la forme :

$$\ln \lambda_1(p) = \ln \lambda_1 - m_N p^2 + O(p^4)$$

($\ln \lambda_1$ coïncide avec l'énergie libre du même ruban avec des conditions aux limites périodiques). Ce développement est valable pour L grand, et conduit à :

$$\pi(z, L) \sim \exp - \frac{z^2}{4 m_N L} \qquad \text{(IV.49)}$$

Le profil d'altitude du ruban est donc gaussien (pour L grand). La hauteur quadratique moyenne est :

$$\langle z^2 \rangle = 2 m_N L \qquad \text{(IV.50)}$$

Elle croît donc linéairement avec L, ce qui est caractéristique d'un *mouvement brownien*.
La longueur sur laquelle la surface reste raisonnablement localisée est Λ_N telle que $\langle z^2 \rangle = 1$:

$$\Lambda_N(t) = \frac{1}{2 m_N(t)} \qquad \text{(IV.51)}$$

Nous appellerons cette quantité *longueur de localisation* de la surface, pour la distinguer des longueurs de corrélation étudiées au paragraphe (IV.2).

4.b) Comportement de la longueur de localisation

Nous allons d'abord expliciter le calcul précédent dans le cas de la "chaîne" (N=1) : l'opérateur τ_p est alors réduit à un nombre (car la chaîne a un seul état interne !) :

$$\tau_p = 1 + 2t \cos p$$

et la formule (IV.48) devient :

$$\pi(z, L) = \int \frac{dp}{2\pi} \exp \left[L \ln (1 + 2t \cos p) + i p z \right]$$

qui donne, pour L grand :

$$p(\zeta, L) \sim \exp - \zeta^2 \frac{1+2t}{4t.L} \qquad \text{(IV.52)}$$

La longueur de localisation correspondante est donc :

$$\Lambda_1(t) = \frac{1+2t}{2t}$$

Nous avons calculé numériquement $\Lambda_N(t)$ pour $N \leq 6$. Les variations de Λ_N en fonction de N sont représentées sur la figure 7, qui est très analogue aux figures 2 et 3 (longueurs ξ_N pour les conditions aux limites $\Delta = 1$ et $\Delta = 2$). Dans la phase invariante d'échelle ($t > t_R$), on observe encore une croissance linéaire: $\Lambda_N \approx a(t).N$, mais avec cette fois-ci une pente a(t) qui dépend sensiblement de t. La relation (IV.18) appliquée à cette pente nous donne :

$$\left| \begin{array}{l} \eta_\Lambda = 0,25 \pm 0,01 \quad \text{à} \quad t = t_R = 0,6 \\ \eta_\Lambda = 0,37 \pm 0,01 \quad \text{à} \quad t = 1 \ (\text{ou } T = \infty) \end{array} \right. \qquad \text{(IV.53)}$$

Remarques : 1) Cette valeur de l'indice critique à $t=t_R$ est en accord avec la valeur $\eta = \frac{1}{4}$ prédite par Onsager, et Kosterlitz-Thouless. Au paragraphe IV.2, l'étude des longueurs ξ_N nous avait donné $\eta_\xi = 1$ (IV.38). Ceci tend à prouver que les longueurs Λ_N, directement reliées au profil à grande distance de notre surface S.O.S., sont mieux adaptées au problème que les longueurs ξ_N, définies de façon abstraite (sans relation avec les corrélations d'une observable bien déterminée).

2) Nous obtenons un indice η_Λ qui *croît* à partir de $\frac{1}{4}$ jusqu'à une valeur $\eta_\Lambda \approx 0.37$ à température infinie, alors que l'indice η du modèle X-Y *décroît* et s'annule à basse température linéairement avec T^*. Ceci est une autre indication du fait que notre modèle est peu crédible à très haute température, où toute approximation "tronquant" le potentiel d'interaction est nécessairement mauvaise.

Nous avons également vérifié l'existence d'une "fonction d'échelle" pour les longueurs de localisation :

$$\frac{\Lambda_N(t)}{\xi_\infty(t)} = h\left(\frac{N}{\xi_\infty(t)}\right) \qquad \text{(IV.54)}$$

(figure 8). Les points représentés correspondent à $\begin{vmatrix} 3 \lesssim N \lesssim 6 \\ 0.25 \lesssim t \lesssim 0.50 \end{vmatrix}$.

La fonction h(x) a les deux comportements-limites suivants :

* $h(x) \approx a\,x$ pour $x \to 0$, avec $a \approx 1.28$, ce qui est en accord avec (IV.49) : $\eta = \frac{1}{4}$ à $t = t_R$.

* $h(x) \sim \exp(kx)$ pour $x \to \infty$ (avec $k \approx 0.3$), ce qui justifie le fait que l'énergie f_1, définie par :

$$\Lambda_N \sim e^{N f_1} \quad (t < t_R) \tag{IV.55}$$

par analogie avec l'énergie f_B de surface du modèle d'Ising (IV.21), vérifie, au voisinage de t_R, la relation d'échelle attendue :

$$f_1(t) \sim \xi^{-1}(t) \sim \exp - \frac{cst.}{(t_R - t)^{1/2}} \tag{IV.56}$$

FIGURE I : Comportement des longueurs de corrélation ξ_N d'un ruban plat ($\Delta = 0$), en fonction de sa largeur N. Les valeurs correspondantes de t sont indiquées.

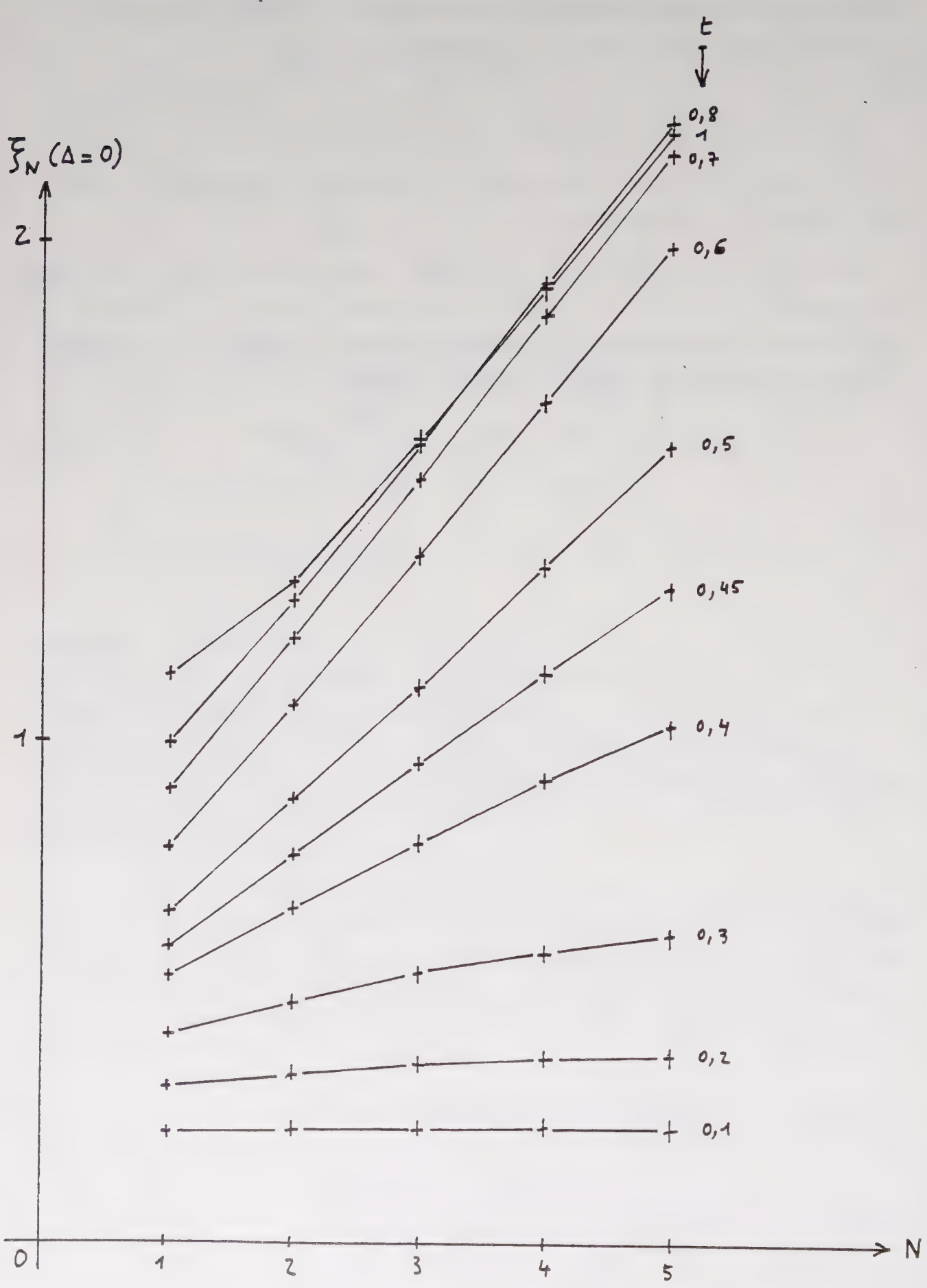


FIGURE 2 : Même quantité dans le cas d'un ruban possédant une marche longitudinale ($\Delta = 1$).

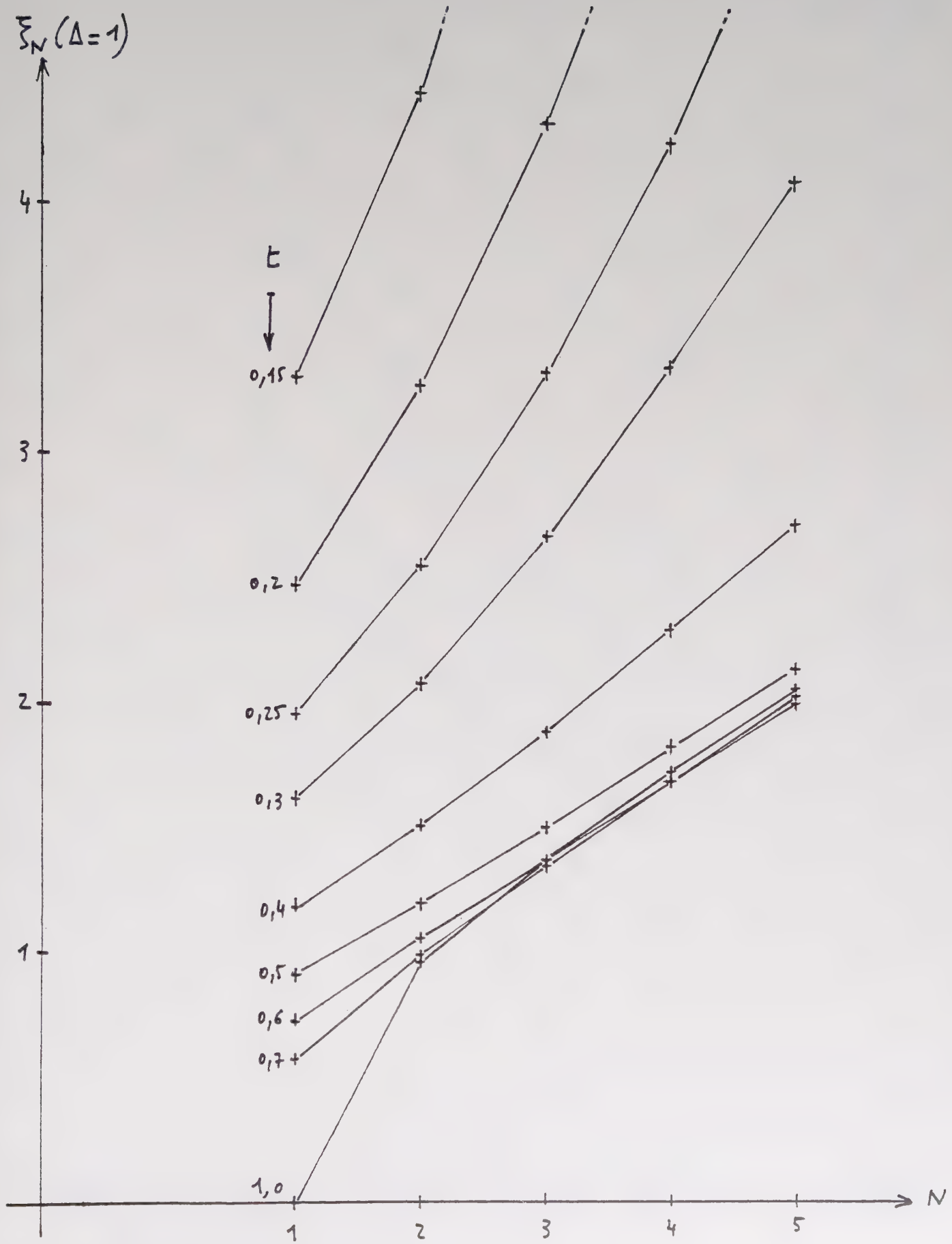


FIGURE 3 : Même quantité dans le cas d'un ruban possédant deux marches longitudinales ($\Delta = 2$).

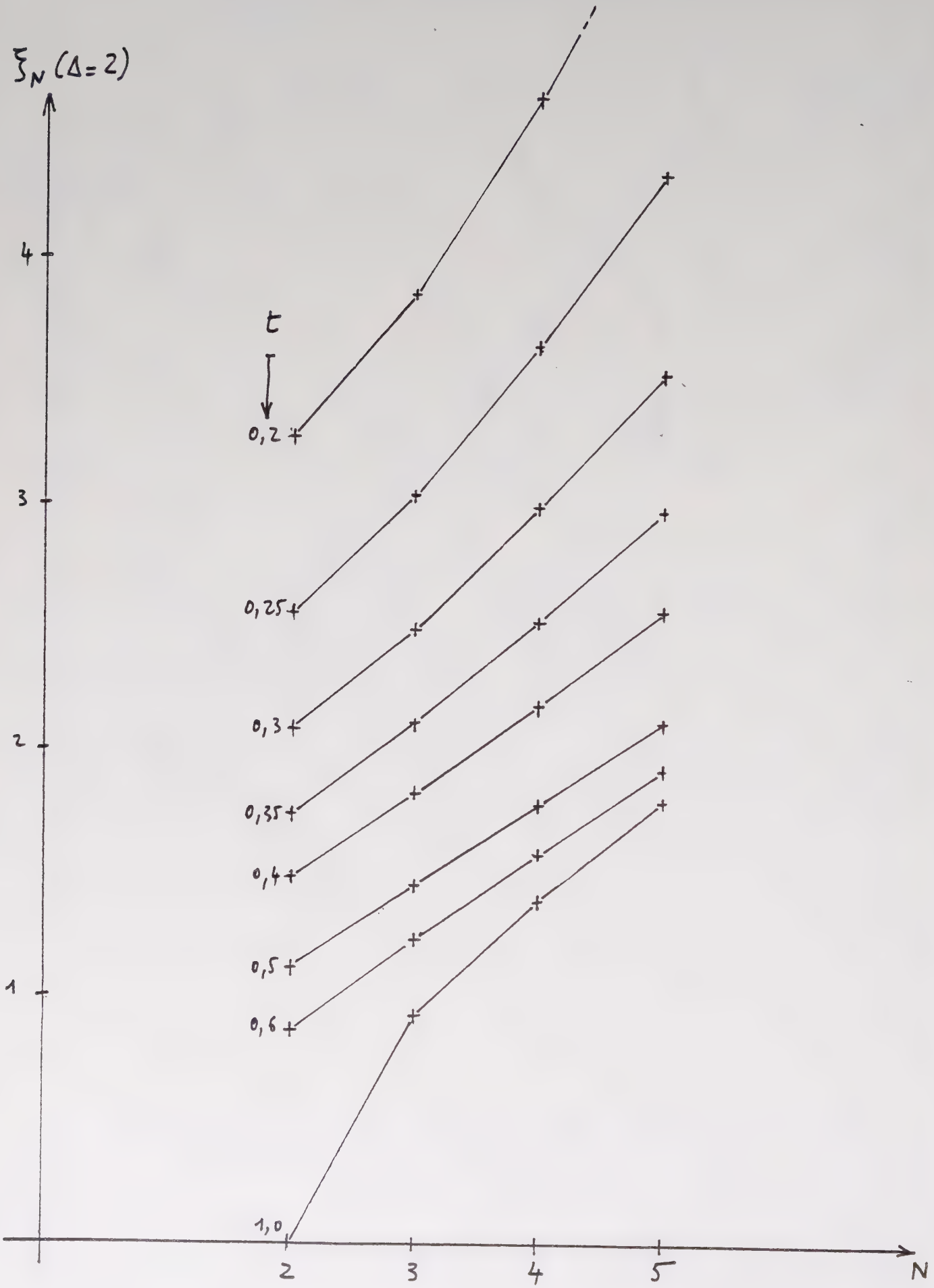


FIGURE 4 : Détermination de l'indice ν. Les points représentent les valeurs extrapolées de l'énergie de marche f_{st} ; les valeurs correspondantes de t sont indiquées. C'est pour cette valeur $\nu = \frac{1}{2}$ que l'alignement est le meilleur; la droite tracée a pour pente $b = -3,79$.

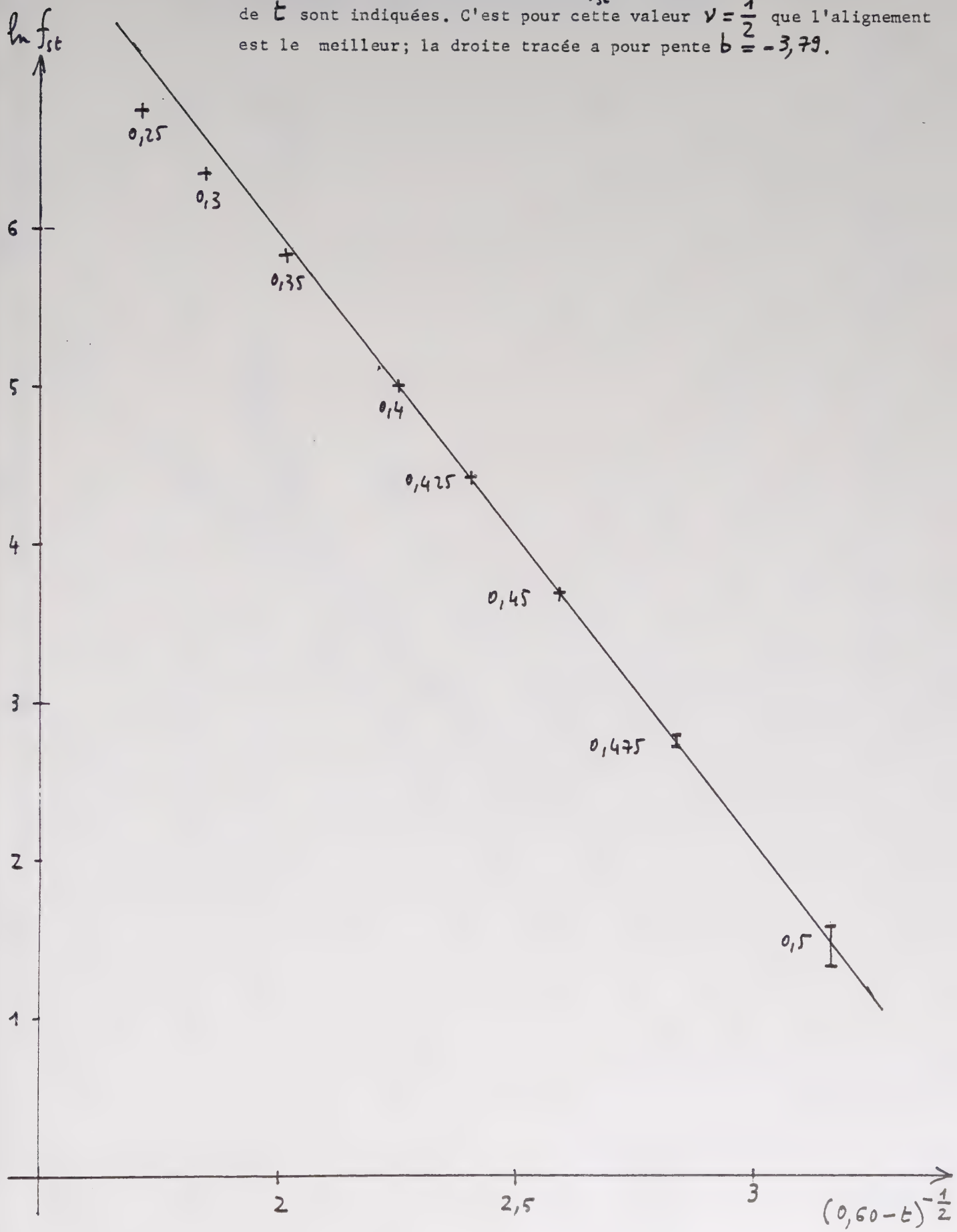


FIGURE 5 : Fonctions d'échelle relatives aux deux énergies de marche f_{st} et f'_{st} (échelles logarithmiques). Noter leur asymptote commune.

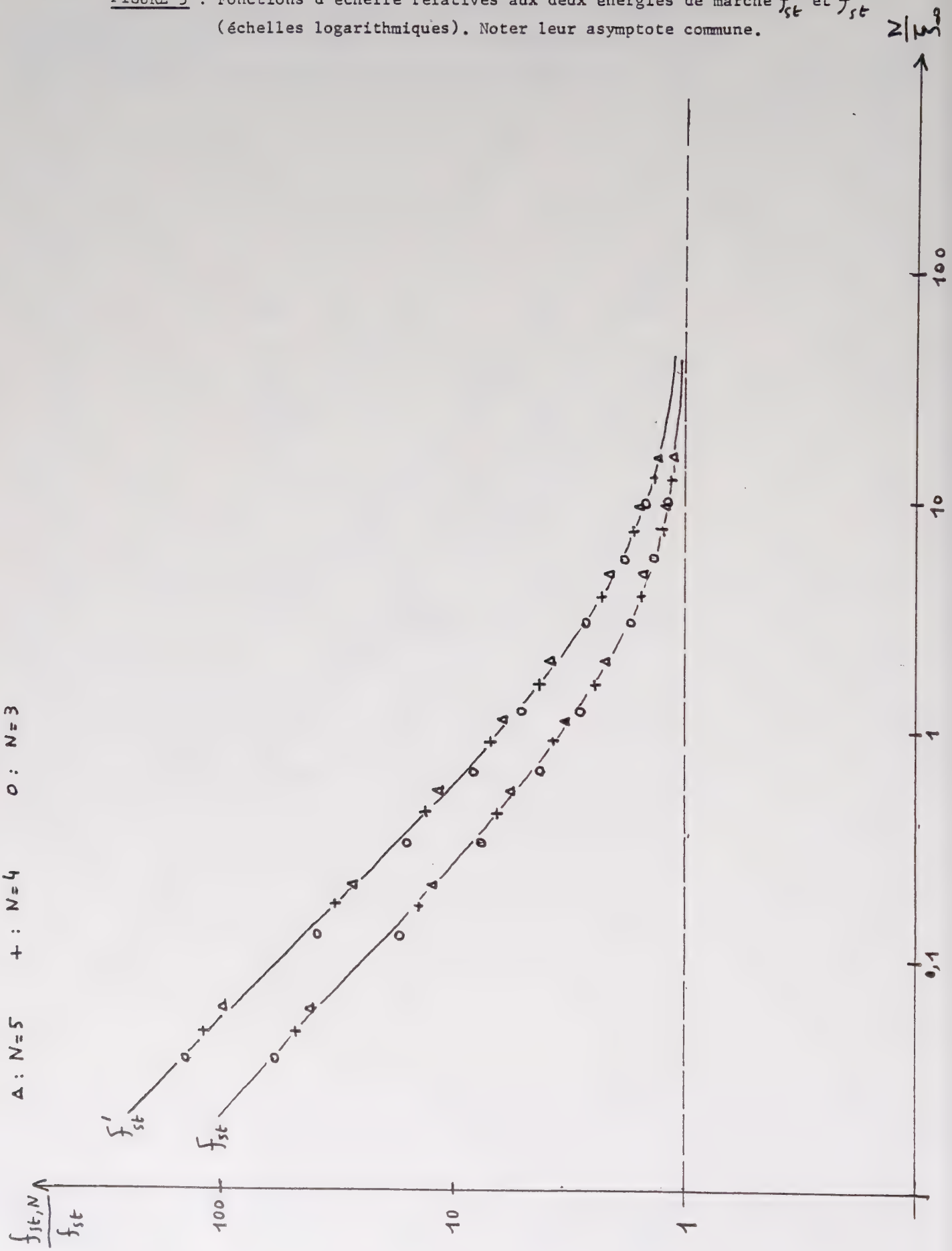


FIGURE 6 : Fonctions d'échelle relatives aux longueurs de corrélation (échelles logarithmiques). Noter la dépendance des comportements asymptotiques en fonction des conditions aux limites (valeurs de Δ).

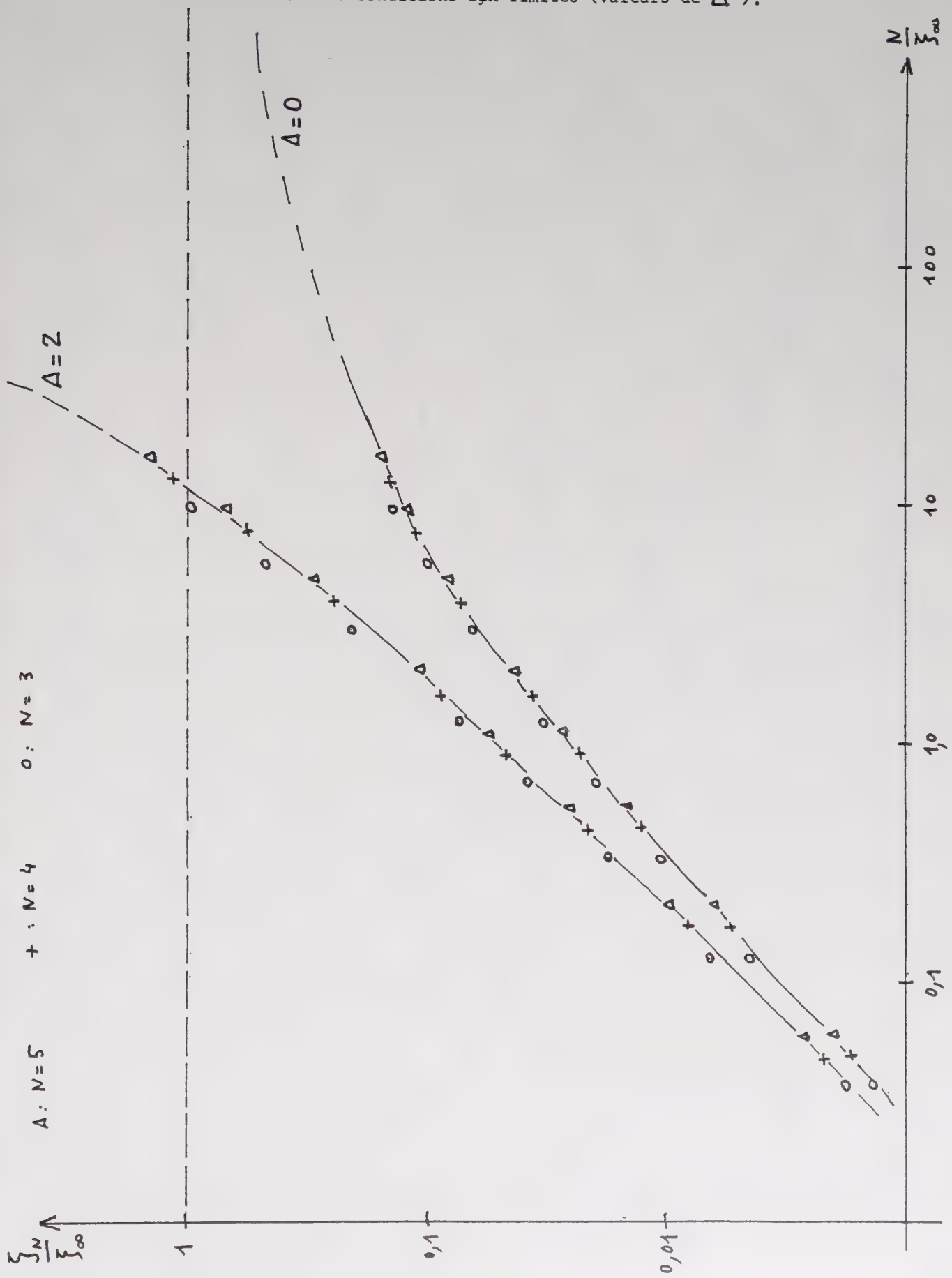


FIGURE 7 : Comportement des longueurs de localisation Λ_N d'un ruban avec conditions aux limites transversales périodiques, en fonction de sa largeur N .

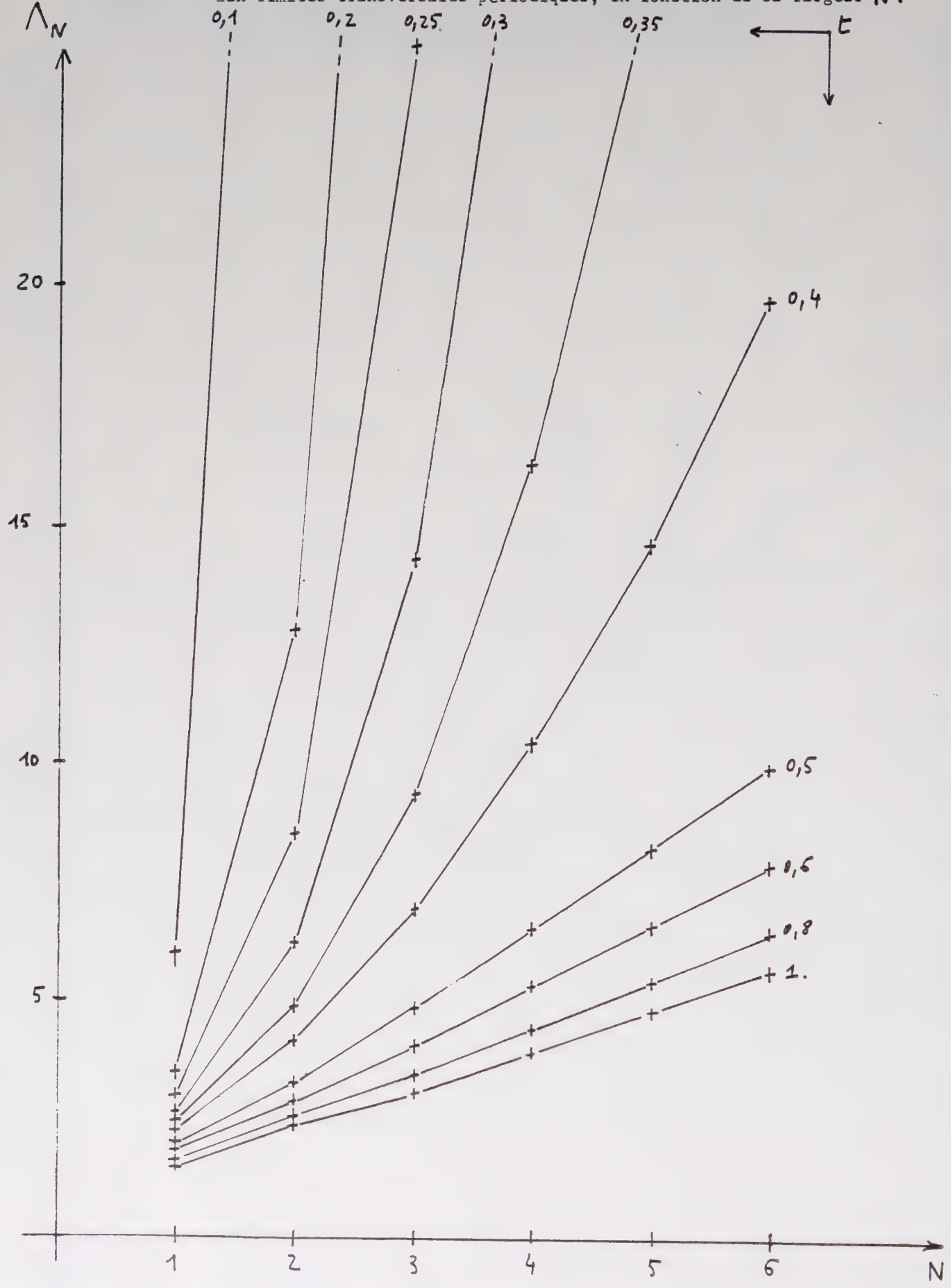
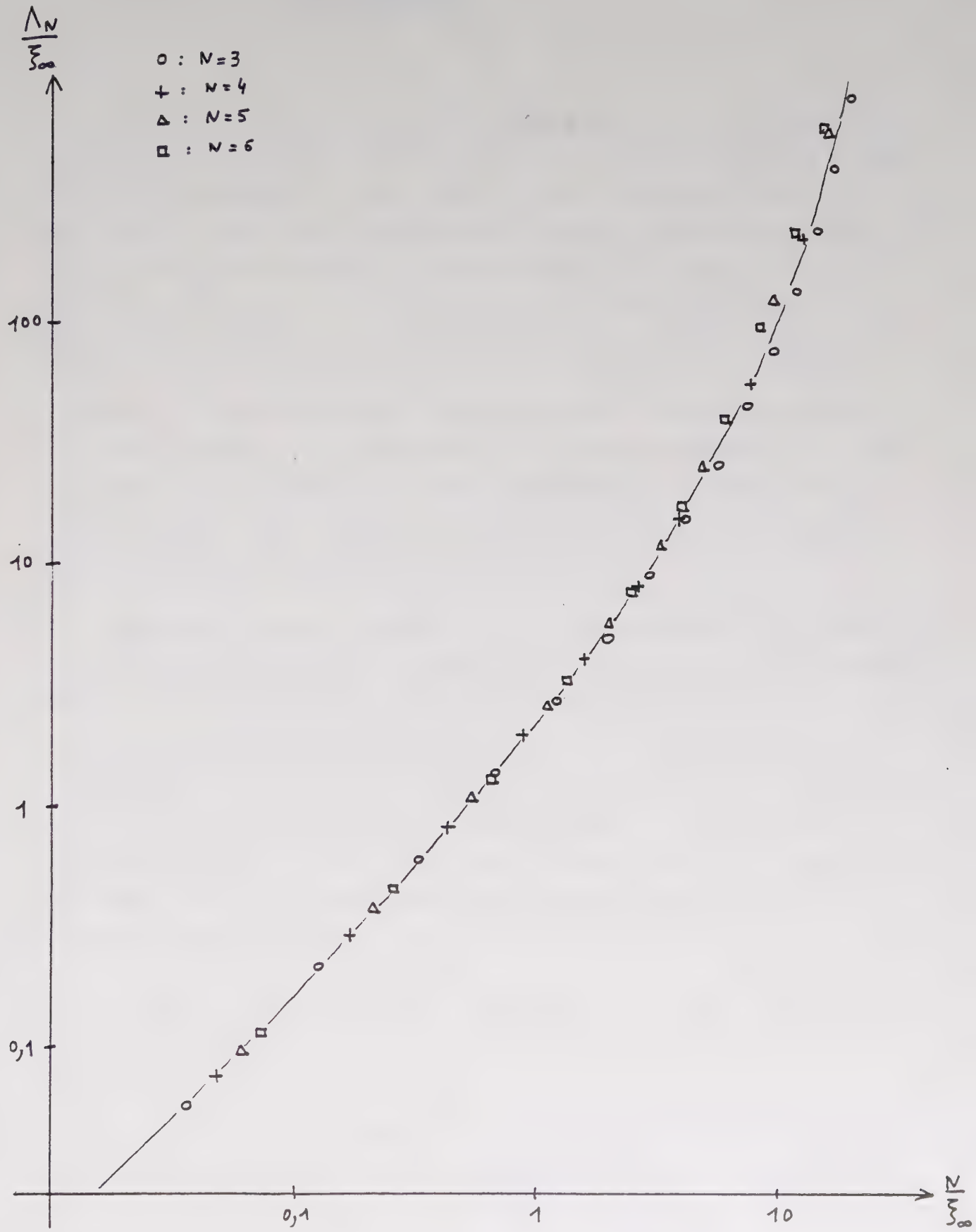


FIGURE 8 : Fonction d'échelle relative aux longueurs de localisation (échelles logarithmiques).



EPILOGUE

Les trois méthodes d'investigation différentes que nous avons employées conduisent à l'image suivante de la transition de rugosité des champs de jauge :

* le cas tridimensionnel est bien compris, grâce à l'approximation S.O.S., qui fournit les prévisions concordantes du groupe de renormalisation (transition de Kosterlitz-Thouless), du modèle exact des six vertex, et de la méthode des rubans. La transition est due à des fluctuations transverses de grande longueur d'onde, qui font perdre au système le souvenir du réseau, et conduisent à des divergences logarithmiques de l'épaisseur de l'interface.

* l'étude de l'énergie de marche et des opérateurs de localisation donnent un résultat important : l'universalité de la transition rugueuse, qui a lieu à une valeur de la constante de couplage indépendante du groupe de jauge. De plus, le comportement critique associé semble dépendre assez peu de la (basse) dimension. Notre phénomène est donc dominé par la délocalisation purement géométrique de surfaces sans structure interne.

* le comportement à grande dimension, qui est le prolongement de la transition à des valeurs non physiques de la constante de couplage, n'est pas entièrement compris : les arbres de cubes en forme d'hydres y jouent-ils un rôle ?

La réponse à cette question n'affecte pas les conséquences physiques (à d=4) du phénomène de rugosité, comme la délocalisation des tubes de flux chromoélectriques. Une interprétation plus générale des implications de notre transition concernant la théorie des champs continue, voire la physique des particules, nécessitera certainement la compréhension globale de la limite continue en présence de champs de matière.

Une autre question ouverte est l'élaboration d'une théorie effective dans la phase rugueuse, probablement en rapport avec un traitement cohérent des surfaces aléatoires.

La renormalisation phénoménologique nous semble également devoir progresser dans un avenir proche. Le "finite-size scaling" vient de recevoir une justification théorique, en ce qui concerne les modèles du type ϕ^4 ; notre cas, possédant une ligne de points fixes, pourrait impliquer une autre forme de lois d'échelle.

Notons enfin que les travaux récents de Symanzik et Poliakov ne sont pas étrangers à tous les problèmes ouverts que nous avons rencontrés, relatifs à la Mécanique Statistique des surfaces, des effets de bords, de taille finie, etc...

REFERENCES ET PUBLICATIONS

Références

[1] C.N.Yang et R.L.Mills, Phys.Rev. 96, 191 (1954)

[2] K.G.Wilson, Phys.Rev. D.10, 2445 (1974)

[3] C.Itzykson and J.B.Zuber, Quantum Field Theory, Mc Graw-Hill (1980)

[4] J.M.Drouffe et C.Itzykson, Physics Reports 38C, 133 (1978)

[5] R.Balian, J.M.Drouffe et C.Itzykson, Phys.Rev. D.10, 3376 (1974)

[6] L.Landau et E.Lifchitz, Physique Statistique, éditions Mir (1967)

[7] N.D.Mermin et H.Wagner, Phys.Rev.Lett. 17, 1133 (1966)

[8] S.Elitzur, Phys.Rev. D.12, 3978 (1975)

[9] J.M.Drouffe, Nucl.Phys. B.170, FS1, 211 (1980)

[10] G.Bhanot et M.Creutz, Phys.Rev. D.21, 2892 (1980)

[11] M.Creutz, Phys.Rev.Lett. 43, 553 (1979)

[12] G.Parisi, Frascati, preprints LNF 79/43 (R) et 79/73 (P) (1979)

[13] C.Itzykson, M.E.Peskin et J.B.Zuber, Phys.Lett. 95B, 259 (1980)

[14] A., E.et P.Hasenfratz, Nucl.Phys. 180, 353 (1981)

[15] W.K.Burton et N.Cabrera, Disc.Faraday Soc. 5, 33 (1949)

[16] W.K.Burton, N.Cabrera et F.C.Franck, Phil.Trans.Roy.Soc.London 243A, 299 (1951)

[17] L.Onsager, Phys.Rev. 65, 117 (1944)

[18] M.Drechsler, Proceedings 2d. Intern. Conf. on Solid Surfaces, Kyoto (1974)

[19] G.Gallavotti, Commun.Math.Phys. 27, 103 (1972)

[20] J.D.Weeks, G.H.Gilmer, H.J.Leamy, Phys.Rev.Lett. 31, 549 (1973)

[21] J.Bricmont, J.Lebowitz et C.E.Pfister, Proceedings 3d. Intern. Conf. on Collective Phenomena, Moscou (déc. 1978)

[22] K.A.Jackson et C.E.Miller, J. Crystal Growth, 40, 169 (1977)

[23] S.Balibar, D.O.Edwards et C.Laroche, Phys.Rev.Lett. 42, 782 (1979)

[24] S.Balibar et B.Castaing, J.Physique Lettres, 41, L329 (1980)

[25] S.Balibar, La Recherche 112, 713 (juin 1980)

[26] R.Savit, Rev.Mod.Phys. 52, 453 (1980)

[27] H.A.Kramers et G.H.Wannier, Phys.Rev. 60, 252 (1941)

[28] R.H.Swendsen, Phys.Rev. B.17, 3710 (1978)

[29] H.J.F.Knops, Phys.Rev.Lett. 39, 766 (1977)

[30] J.V.José et al, Phys.Rev. B.16, 1217 (1977)

[31] R.Peierls, Ann.Inst. H.Poincaré, 5, 177 (1935)

[32] J.M.Kosterlitz et D.J.Thouless, J.Phys. C.6, 1181 (1973)

[33] J.M.Kosterlitz, J.Phys. C.7, 1046 (1974)

[34] S.T.Chui et J.D.Weeks, Phys.Rev. B14, 4978 (1976)

[35] T.Ohta et K.Kawasaki, Progr.Theor.Phys., 60, 365 (1978)

[36] H.van Beijeren, Phys.Rev.Lett. 38, 993 (1977)

[37] M.Gaudin, "Modèles exacts en Mécanique Statistique", note CEA N° 1559 (1972)

[38] Phase Transitions and Critical Phenomena, C.Domb et M.S.Green, Academic Press (1972)

[39] M.Lüscher, DESY Preprint 80/87 (1980)
M.Lüscher, K.Symanzik et P.Weisz, DESY Preprint 80/31 (1980)

[40] M.E.Fischer, Int.School Enrico Fermi, Varenna (1970)

[41] R.Balian, J.M.Drouffe et C.Itzykson, Phys.Rev. D11, 2104 (1975)
et D19, 2514 (1979)

[42] J.M.Drouffe et J.B.Zuber, Nucl.Phys. 180 (FS2), 253 et 264 (1981)

[43] G.A.Baker (Jr.) et D.L.Hunter, Phys.Rev. B7, 3377 (1973)

[44] D.Bessis, P.Moussa et G.Turchetti, J.Phys. A13, 2763 (1980)

[45] M.P.Nightingale, Physica 83A, 561 (1976)

[46] B.Derrida, J.Phys. A14, L5 (1981)

[47] J.L.Pichard et G.Sarma, J.Phys. C14, L127 et L617 (1981)

[48] C.J.Hamer et M.N.Barber, J.Phys. A14, 241 et 259 (1981)

[49] B.Derrida et J.Vannimenus, J.de Physique Lettres, 41, L473 (1980)

[50] T.D.Schultz, D.C.Mattis et E.H.Lieb, Rev.of Mod.Phys. 36, 856 (1964)

[51] B.Derrida, L.de Sèze et J.Vannimenus, Intern.Conf.on Disordered systems and Localization, Rome (mai 1981)

[52] M.E.Fischer et M.N.Barber, Phys.Rev.Lett. 28, 1516 (1972)

[53] E.Brézin, Saclay preprint DPh-T/81-60.

Publications

[54] "The step free energy and the behavior at the roughening transition of lattice gauge theories"
J.M.Drouffe, J.M.Luck, J.B.Zuber, J.de Physique 42, 653 (1981)

[55] "Finite-size lattice method and the roughening transition"
J.M.Luck, J.Physique Lettres, 42, L275 (1981)